## 杭州二中高三三月月考数学卷

一、选择题(本大题共10小题，每小题4分，共40分)

1．已知集合*M*＝{*x*|1≤*x*≤3}，*N*＝{*x*|*x*>2}，则集合*M*∩(∁**R***N*)等于(　　)

A．{*x*|1≤*x*≤2} B．{*x*|*x*≥1} C．{*x*|1≤*x*<2} D．{*x*|2<*x*≤3}

2．设双曲线－＝1(*a*>0)的两焦点之间的距离为10，则双曲线的离心率为(　　)

A. B. C. D.

3．已知*x*，*y*∈**R**，且*x*>*y*>0，若*a*>*b*>1，则一定有(　　)

A．log*ax*>log*by* B．sin*ax*>sin*by* C．*ay*>*bx* D．*ax*>*by*

4．将函数*y*＝cos(2*x*＋*φ*)的图象向右平移个单位长度，得到的函数为奇函数，则|*φ*|的最小值为(　　)

A. B. C. D.

5．函数*f*(*x*)＝e|*x*－1|－2cos(*x*－1)的部分图象可能是(　　)

 

6．随机变量*ξ*的分布列如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *ξ* | －1 | 0 | 1 |
| *P* | *a* | *b* | *c* | 学科网(www.zxxk.com)--教育资源门户，提供试卷、教案、课件、论文、素材及各类教学资源下载，还有大量而丰富的教学相关资讯！ |

其中*a*，*b*，*c*成等差数列，则*D*(*ξ*)的最大值为(　　)

A. B. C. D.

7．已知单位向量***e***1，***e***2，且***e***1·***e***2＝－，若向量***a***满足(***a***－***e***1)·(***a***－***e***2)＝，则|***a***|的取值范围为(　　)

A. B. C. D.

8.在等腰梯形*ABCD*中，已知*AB*＝*AD*＝*CD*＝1，*BC*＝2，将△*ABD*沿直线*BD*翻折成△*A*′*BD*，如图，则直线*BA*′与*CD*所成角的取值范围是(　　)

A. B. C. D.

9．已知函数*f*(*x*)＝() *g*(*x*)＝*kx*＋2，若函数*F*(*x*)＝*f*(*x*)－*g*(*x*)在[0，＋∞)上只有两个零点，则实数*k*的值不可能为(　　)

A．－ B．－ C．－ D．－1

10．已知数列满足，*a*1＝1，*a*2＝，且[3＋(－1)*n*]*an*＋2－2*an*＋2[(－1)*n*－1]＝0，*n*∈**N**\*，记*T*2*n*为数列{*an*}的前2*n*项和，数列{*bn*}是首项和公比都是2的等比数列，则使不等式·<1成立的最小整数*n*为(　　)

A．7 B．6 C．5 D．4

二、填空题(本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分)

11．若*n*的展开式中所有项的系数的绝对值之和为64，则*n*＝\_\_\_\_\_\_\_\_；该展开式中的常数项是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

12．已知实数*x*，*y*满足若此不等式组所表示的平面区域形状为三角形，则*m*的取值范围为\_\_\_\_\_\_\_，如果目标函数*z*＝2*x*－*y*的最小值为－1，则实数*m*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

13．如图是一个几何体的三视图，若它的体积是，则*a*＝\_\_\_\_\_\_\_\_，该几何体的表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_．



14．在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*所对的边分别是*a*，*b*，*c*若*a*＝，*c*＝3，*A*＝60°，则*b*＝\_\_\_\_\_\_\_\_，△*ABC*的面积*S*＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

15.如图所示，在排成4×4方阵的16个点中，中心位置4个点在某圆内，其余12个点在圆外．从16个点中任选3点，作为三角形的顶点，其中至少有一个顶点在圆内的三角形共有\_\_\_\_个．



16．若实数满足，则的最小值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

17．设点*P*是△*ABC*所在平面内一动点，满足＝*λ*＋*μ*，3*λ*＋4*μ*＝2(*λ*，*μ*∈**R**)，||＝||＝||.若

|*A*|＝3，则△*ABC*面积的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

三、解答题(本大题共5小题，共74分．)

18．(14分) 已知函数的最小正周期为，

(1)求的值；

(2)若且，求的值。

[来源:学#科#网]

19．(15分)如图，已知四边形*ABCD*是正方形，*AE*⊥平面*ABCD*，*PD*∥*AE*，*PD*＝*AD*＝2*EA*＝2，*G*，*F*，*H*分别为*BE*，*BP*，*PC*的中点．

(1)求证：平面*ABE*⊥平面*GHF*；

(2)求直线*GH*与平面*PBC*所成的角*θ*的正弦值．

[来源:Z&xx&k.Com]

20．(15分)已知数列{*an*}满足：*a*1＝，*an*＋1＝(*n*∈**N**\*)．(其中e为自然对数的底数，e＝2.71828…)

(1)证明：*an*＋1>*an*(*n*∈**N**\*)；

(2)设*bn*＝1－*an*，是否存在实数*M*>0，使得*b*1＋*b*2＋…＋*bn*≤*M*对任意*n*∈**N**\*成立？若存在，求出*M*的一个值；若不存在，请说明理由．

21．(15分)如图，O为坐标原点，点F为抛物线的焦点，且抛物线上点P处的切线与圆相切于点Q,

（1）当直线PQ的方程为时，求抛物线的方程；

（2）当正数变化时，记分别为的面积，

求的最小值。

22．(15分)已知函数*f*(*x*)＝e*x*－e*x*sin *x*，*x*∈(e为自然对数的底数)．

(1)求函数*f*(*x*)的值域；

(2)若不等式*f*(*x*)≥*k*(*x*－1)(1－sin *x*)对任意*x*∈恒成立，求实数*k*的取值范围；

(3)证明：e*x*－1＞－(*x*－)2＋1.

## 杭州二中高三三月月考数学卷参考答案

一、选择题(本大题共10小题，每小题4分，共40分)

1．答案　A

解析　∵*N*＝{*x*|*x*>2}，∴∁**R***N*＝{*x*|*x*≤2}，∴集合*M*∩(∁**R***N*)＝{*x*|1≤*x*≤2}．

2．答案　C

解析　因为双曲线－＝1(*a*>0)的两焦点之间的距离为10，所以2*c*＝10，*c*＝5，所以*a*2＝*c*2－9＝16，所以*a*＝4.所以离心率*e*＝.

3．答案　D

解析　当*x*>*y*>0，*a*>*b*>1时，由指数函数和幂的性质易得*ax*>*ay*>*by*.

4．答案　B

解析　设*y*＝cos(2*x*＋*φ*)向右平移个单位长度得到的函数为*g*(*x*)，则*g*(*x*)＝cos，因为*g*(*x*)为奇函数，且在原点有定义，所以－＋*φ*＝*k*π＋(*k*∈**Z**)，解得*φ*＝*k*π＋(*k*∈**Z**)，故当*k*＝－1时，|*φ*|min＝.

5． 答案　A

解析　因为*f*(1)＝－1，所以排除B；因为*f*(0)＝e－2cos 1>0，所以排除D；因为当*x*>2时，*f*(*x*)＝e*x*－1－2cos (*x*－1)，∴*f*′(*x*)＝e*x*－1＋2sin(*x*－1)>e－2>0，即*x*>2时，*f*(*x*)具有单调性，排除C.

6．答案　A

解析　由分布列得*a*＋*b*＋*c*＝1，又因为*a*，*b*，*c*成等差数列，所以2*b*＝*a*＋*c*，则*a*＋*c*＝，所以*E*(*ξ*)＝*c*－*a*，*D*(*ξ*)＝*a*(*c*－*a*＋1)2＋*b*(*c*－*a*)2＋*c*(*c*－*a*－1)2＝*a*(*c*－*a*)2＋*b*(*c*－*a*)2＋*c*(*c*－*a*)2＋2*a*(*c*－*a*)＋*a*－2*c*(*c*－*a*)＋*c*＝－(*c*－*a*)2＋，则当*a*＝*c*时，*D*(*ξ*)取得最大值.

7．答案　B

解析　因为向量***e***1，***e***2为单位向量，且***e***1·***e***2＝|***e***1|·|***e***2|·cos〈***e***1，***e***2〉＝－，所以|***e***1＋***e***2|＝＝1.因为(***a***－***e***1)·(***a***－***e***2)＝，所以***a***2－***a***·(***e***1＋***e***2)＋***e***1·***e***2＝，所以|***a***|2－***a***·(***e***1＋***e***2)＝，所以|***a***|2－|***a***|·cos〈***a***，***e***1＋***e***2〉＝，所以cos〈***a***，***e***1＋***e***2〉＝，又因为－1≤cos〈***a***，***e***1＋***e***2〉≤1，所以|***a***|的取值范围为.

8.答案　A

解析　在等腰梯形*ABCD*中，易知∠*ABC*＝，∠*ABD*＝∠*CBD*＝，则∠*A*′*BD*＝，为定值，所以*BA*′的轨迹可看作是以*BD*为轴，*B*为顶点，母线与轴的夹角为的圆锥的侧面，故点*A*′的轨迹如图中所示，其中*F*为*BC*的中点．过点*B*作*CD*的平行线，过点*C*作*BD*的平行线，两平行线交于点*E*，则直线*BA*′与*BE*所成的角即直线*BA*′与*CD*所成的角．又易知*CD*⊥*BD*，所以直线*A*′*B*与*CD*所成角的取值范围是，故选A.

9．答案　A

解析　函数*F*(*x*)＝*f*(*x*)－*g*(*x*)的零点为函数*y*＝*f*(*x*)与*y*＝*g*(*x*)图象的交点，在同一直角坐标系下作出函数*y*＝*f*(*x*)与*y*＝*g*(*x*)的图象，如图所示，



当函数*y*＝*g*(*x*)的图象经过点(2,0)时满足条件，此时*k*＝＝－1 ，当函数*y*＝*g*(*x*)的图象经过点(4,0)时满足条件，此时*k*＝＝－ ，当函数*y*＝*g*(*x*)的图象与(*x*－1)2＋*y*2＝1(*x*>0，*y*>0)相切时也满足题意，此时＝1 ，解得*k*＝－， 故选A.

10．答案　C

解析　因为[3＋(－1)*n*]*an*＋2－2*an*＋2[(－1)*n*－1]＝0，*n*∈**N**\*，∴当*n*为偶数时，可得(3＋1)*an*＋2－2*an*＋2(1－1)＝0，*n*∈**N**\*，即＝，∴*a*2，*a*4，*a*6，…是以*a*2＝为首项，以为公比的等比数列；当*n*为奇数时，可得(3－1)*an*＋2－2*an*＋2(－1－1)＝0，*n*∈**N**\*，即*an*＋2－*an*＝2，∴*a*1，*a*3，*a*5，…是以*a*1＝1为首项，以2为公差的等差数列，*T*2*n*＝(*a*1＋*a*3＋*a*5＋…＋*a*2*n*－1)＋(*a*2＋*a*4＋*a*6＋…＋*a*2*n*)＝*n*2＋1－，∵数列{*bn*}是首项和公比都是2的等比数列，*bn*＝2×2*n*－1＝2*n*，则·<1等价为·<1，即(*n*2＋1)·<1，即*n*2＋1<2*n*，分析函数*y*＝*n*2＋1与*y*＝2*n*，则当*n*＝1时，2＝2，当*n*＝2时，5<4不成立，当*n*＝3时，10<8不成立，当*n*＝4时，17<16不成立，当*n*＝5时，26<32成立，当*n*≥5时，*n*2＋1<2*n*恒成立，故使不等式·<1成立的最小整数*n*为5.[来源:学科网]

二、填空题(本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分)

11． 答案　3　－27

解析　所求系数的绝对值之和相当于*n*中所有项的系数之和，则在*n*中令*x*＝1，得(3＋1)*n*＝64，所以*n*＝3；3的通项为*Tk*＋1＝C(3)3－*kk*＝C·33－*k*·(－1)*k*，令＝0，则*k*＝1，常数项为C×32×(－1)1＝－27.

12．答案　(2，＋∞)　4

解析　要使不等式组所表示的平面区域形状为三角形，直线*x*＝1与直线*x*－2*y*＋1＝0的交点(1,1)必在直线的左下方，所以*m*>2，画出该区域如图阴影部分所示(含边界)，



由*z*＝2*x*－*y*得*y*＝2*x*－*z*，由图可知，当直线*y*＝2*x*－*z*过点*A*(1，*m*－1)时在*y*轴上的截距最大，*z*最小，所以，－1＝2×1－(*m*－1)，解得*m*＝4.

13． 答案　1　3＋

解析　如图所示，此几何体是四棱锥，底面是边长为*a*的正方形，平面*SAB*⊥平面*ABCD*，并且∠*SAB*＝90°，*SA*＝2，所以体积是*V*＝×*a*2×2＝，解得*a*＝1，四个侧面都是直角三角形，所以计算出表面积是*S*＝12＋×1×2＋×1×＋×1×2＋×1×＝3＋.

14．答案　1或2　或

解析　由余弦定理得*a*2＝*b*2＋*c*2－2*bc*cos *A*，即7＝*b*2＋9－2*b*×3cos 60°，即*b*2－3*b*＋2＝0，解得*b*＝1或2, 当*b*＝1时， *S*＝*bc*sin *A*＝×1×3×sin 60°＝，同理当*b*＝2时， *S*＝.

15. 答案　312

解析　根据题意，分3种情况讨论：[来源:Zxxk.Com]

①取出的3个点都在圆内，C＝4，即有4种取法；

②在圆内取2点，圆外12点中有10个点可供选择，从中取1点，CC＝60，即有60种取法；

③在圆内取1点，圆外12点中取2点，C＝248，即有248种取法．

则至少有一个顶点在圆内的三角形有4＋60＋248＝312(个)．

16．答案 3

解析 因为表示圆及其内部，易得直线与圆相离，所以，当时， ，如图所示，可行域为小的弓形内部，目标函数，则可知当时， ；当时， ，

如图所示，可行域为大的弓形内部，目标函数，则可知当时， ，[来源:学科网]

综上所述， 的最小值是．

17． 答案　9

解析　由3*λ*＋4*μ*＝2，得*λ*＋2*μ*＝1，所以＝*λ*＋*μ*＝*λ*·＋2*μ*·.

设＝，＝，

则由平面向量基本定理知点*P*，*M*，*N*在同一直线上，又||＝||＝||，

所以*P*为△*ABC*的外心，且∠*ACB*为锐角，*PN*⊥*BC*，由此可作图，如图所示，

设∠*ACB*＝*θ*，*CN*＝*x*，则*BC*＝2*x*，*CM*＝，*CA*＝，

所以*S*△*ABC*＝*AC*·*BC*sin *θ*＝··2*x*·sin *θ*＝*x*2，

在△*ABC*中，*AB*2＝*AC*2＋*BC*2－2*AC*·*BC*cos *θ*，即4*x*2＋－2·2*x*··cos *θ*＝9，

所以*x*2＝，所以*S*△*ABC*＝·＝＝＝≤9.

当且仅当9tan *θ*＝，即tan *θ*＝时等号成立，所以△*ABC*面积的最大值是9.

三、解答题(本大题共5小题，共74分．)

18．



19． 解　(1)因为*AE*⊥平面*ABCD*，*BC*⊂平面*ABCD*，所以*AE*⊥*BC*，

因为四边形*ABCD*是正方形，所以*AB*⊥*BC*，

又*BA*∩*AE*＝*A*，*BA*，*AE*⊂平面*ABE*，所以*BC*⊥平面*AEB*，

因为*F*，*H*分别为*BP*，*PC*的中点，所以*FH*为△*PBC*的中位线，

所以*FH*∥*BC*，所以*FH*⊥平面*ABE*，

又*FH*⊂平面*GHF*，所以平面*ABE*⊥平面*GHF*.

(2)解　方法一　因为*AE*⊥平面*ABCD*，*PD*∥*AE*，所以*PD*⊥平面*ABCD*，

又*BC*⊂平面*ABCD*，所以*PD*⊥*BC*，因为四边形*ABCD*是正方形，所以*CD*⊥*BC*，

又*PD*∩*CD*＝*D*，*PD*，*CD*⊂平面*PCD*，所以*BC*⊥平面*PCD*，

又*BC*⊂平面*PBC*，所以平面*PBC*⊥平面*PCD*.

连接*DH*，则*DH*⊥*PC*，因为平面*PBC*∩平面*PCD*＝*PC*，所以*DH*⊥平面*PBC*，

所以∠*DHG*为直线*GH*与平面*PBC*所成角的余角，即*θ*＝－∠*DHG*.

在等腰直角三角形*PDC*中，因为*PD*＝*DC*＝2，所以*PC*＝2，所以*DH*＝＝.

连接*DG*，易知*DG*＝＝，*GH*＝＝，

所以在△*DHG*中，cos∠*DHG*＝＝，

所以sin *θ*＝sin＝cos∠*DHG*＝，即直线*GH*与平面*PBC*所成的角*θ*的正弦值为.

方法二　易知*DA*，*DC*，*DP*两两垂直，所以以*D*为原点，*DA*所在直线为*x*轴，*DC*所在直线为*y*轴，*DP*所在直线为*z*轴，建立如图所示的空间直角坐标系，由*PD*＝*AD*＝2*EA*＝2，易得*B*(2,2,0)，*C*(0,2,0)，*P*(0,0,2)，*H*(0,1,1)，*G*，则＝(0，－2,2)，＝(2,0,0)，＝.

设平面*PBC*的法向量为***n***＝(*x*，*y*，*z*)，

则()()()()则则

令*y*＝1，则*z*＝1，所以***n***＝(0,1,1)为平面*PBC*的一个法向量，

所以sin *θ*＝|cos〈***n***，〉|＝＝＝，

故直线*GH*与平面*PBC*所成的角*θ*的正弦值为.

20． (1)证明　设*f*(*x*)＝e*x*－*x*－1，令*f*′(*x*)＝e*x*－1＝0，得到*x*＝0.

当*x*∈(－∞，0)时，*f*′(*x*)<0，*f*(*x*)单调递减；当*x*∈(0，＋∞)时，*f*′(*x*)>0，*f*(*x*)单调递增．

故*f*(*x*)≥*f*(0)＝0，即e*x*≥*x*＋1(当且仅当*x*＝0时取等号)．故*an*＋1＝≥*an* ，且取不到等号，所以*an*＋1>*an*.

(2)解　先用数学归纳法证明*an*≤1－.

①当*n*＝1时，*a*1≤1－成立．

②假设当*n*＝*k*(*k*≥1，*k*∈**N**\*)时，不等式*ak*≤1－成立，那么当*n*＝*k*＋1时，*ak*＋1＝≤＝≤＝ ＝1－，即*ak*＋1≤1－也成立．故对*n*∈**N**\*都有*an*≤1－.

所以*bn*＝1－*an*≥.

取*n*＝2*t*－1(*t*∈**N**\*)，*b*1＋*b*2＋…＋*bn* ≥＋＋…＋ ＝＋＋… ＋.

即*b*1＋*b*2＋…＋*bn* ≥＋＋…＋＝. 其中*t*＝log2*n*＋1，*t*∈**N**\*，

当*n*→＋∞时，*t*→＋∞，→＋∞，

所以不存在满足条件的实数*M*，使得*b*1＋*b*2＋…＋*bn*≤*M*对任意*n*∈**N**\*成立．

21．



22．(1)解　因为*f*(*x*)＝e*x*－e*x*sin *x*，所以*f*′(*x*)＝e*x*－e*x*(sin *x*＋cos *x*)＝e*x*(1－sin *x*－cos *x*)＝e*x*，

∵*x*∈，∴*x*＋∈，∴sin≥，所以*f*′(*x*)≤0，

故函数*f*(*x*)在上单调递减，函数*f*(*x*)的最大值为*f*(0)＝1－0＝1；

*f*(*x*)的最小值为*f*＝－sin ＝0，所以函数*f*(*x*)的值域为[0,1]．

(2)解　原不等式可化为e*x*(1－sin *x*)≥*k*(*x*－1)(1－sin *x*)，(\*)

因为1－sin *x*≥0恒成立，故(\*)式可化为e*x*≥*k*(*x*－1)．

令*g*(*x*)＝e*x*－*kx*＋*k*，*x*∈，则*g*′(*x*)＝e*x*－*k*，

当*k*≤0时，*g*′(*x*)＝e*x*－*k*>0，所以函数*g*(*x*)在上单调递增，故*g*(*x*)≥*g*(0)＝1＋*k*≥0，所以－1≤*k*≤0；

当*k*>0时，令*g*′(*x*)＝e*x*－*k*＝0，得*x*＝ln *k*，

所以当*x*∈(0，ln *k*)时，*g*′(*x*)＝e*x*－*k*<0；当*x*∈(ln *k*，＋∞)时，*g*′(*x*)＝e*x*－*k*>0.

所以当ln *k*＜，即0<*k*<时，函数*g*(*x*)min＝*g*(ln *k*)＝2*k*－*k*ln *k*>0成立；

当ln *k*≥，即*k*≥时，函数*g*(*x*)在上单调递减，*g*(*x*)min＝*g*＝－*k*·＋*k*≥0，解得≤*k*≤，

综上，－1≤*k*≤.

(3)证明　令*h*(*x*)＝e*x*－1＋2－1，则*h*′(*x*)＝e*x*－1＋*x*－.

令*t*(*x*)＝*h*′(*x*)＝e*x*－1＋*x*－，则*t*′(*x*)＝e*x*－1＋1>0，所以*h*′(*x*)在**R**上单调递增，

由*h*′＝－1＜0，*h*′＝－＞0，故存在*x*0∈，使得*h*′＝0，

即＝－*x*0.

所以当*x*∈(－∞，*x*0)时，*h*′(*x*)<0；当*x*∈(*x*0，＋∞)时，*h*′(*x*)>0.

故当*x*＝*x*0时，函数*h*(*x*)有极小值，且是唯一的极小值，

故函数*h*(*x*)min＝*h*(*x*0)＝＋2－1＝－＋2－1＝×2－＝2－，

因为*x*0∈，所以2－>×2－＝>0，故*h*(*x*)＝e*x*－1＋2－1>0，

即e*x*－1>－2＋1.