**浙江省名校协作体2020届高三3月第二次联考数学试题**



**一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．若全集*U*＝{0，1，2，3，4，5，6，7}，集合*A*＝{3，4，5，6}，集合*B*＝{1，3，4}，则集合∁U*A*∩∁U*B*＝（　　）

A．{0，1，2，5，6，7} B．{1}

C．{0，2，7} D．{5，6}

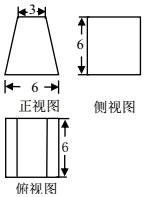
2．已知双曲线1（*a*＞0，*b*＞0）的渐近线方程为*y*＝±3*x*，则双曲线的离心率是（　　）

A． B． C． D．3

3．若直线*y*＝*ax*+2*a*与不等式组表示的平面区域有公共点，则实数*a*的取值范围是（　　）

A．[0，] B．[0，9] C．[0，+∞] D．[﹣∞，9]

4．某几何体的三视图如图所示（单位：*cm*），该几何体的体积（单位：*cm*3）是（　　）



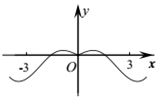
A．162 B．126 C．144 D．108+36

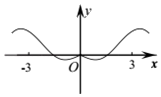
5．已知平面α⊥平面β，且α∩β＝*l*，*a*⊂α，*b*⊂β，则“*a*⊥*b*”是“*a*⊥*l*或*b*⊥*l*”的（　　）

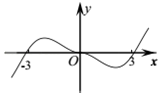
A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

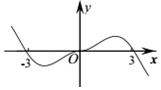
C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

6．函数*y*＝（1）|*x*|的图象可能是（　　）

A．.

B．.

C．.

D．．

7．已知0＜*a*＜1，随机变量*X*，*Y*的分布列如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* | （1﹣*a*）2 | 2*a*（1﹣*a*） | *a*2 |

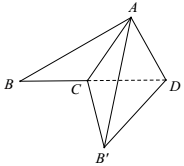
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Y* | 1 | 0 | ﹣1 |
| *P* | （1﹣*a*）2 | 2*a*（1﹣*a*） | *a*2 |

则下列正确的是（　　）

A．*E*（*Y*）＝2*a* B．*E*（*X*）＝*E*（*Y*）

C．*D* （*Y*） D．*D*（ *X*）＝*D* （*Y*）

8．已知*C*为Rt△*ABD*斜边*BD*上一点，且△*ACD*为等边三角形，现将△*ABC*沿*AC*翻折至△*AB*′*C*．若在三棱锥*B*′﹣*ACD*中，直线*CB*′和直线*AB*′与平面*ACD*所成角分别为α，β，则（　　）



A．0＜α＜β B．β＜α≤2β C．2β≤α≤3β D．α≥3β

9．已知0＜*a*＜*b*，则下列正确的是（　　）

A． B．

C． D．以上均不正确

10．已知数列{*an*}满足：*a*1＝0，（*n*∈**N**\*），前*n*项和为*Sn*（参考数据：*ln*2≈0.693，*ln*3≈1.099），则下列选项中错误的是（　　）

A．{*a*2*n*﹣1}是单调递增数列，{*a*2*n*}是单调递减数列

B．*an*+*an*+1≤*ln*3

C．*S*2020＜666

D．*a*2*n*﹣1＜*a*2*n*

**二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分．**

11．已知复数*z*（*i*是虚数单位），则|*z*|＝　 　．

12．我国古代数学著作《增删算法统宗》中有这样一道题：“三百七十八里关，初行健步不为难；次日脚痛减一半，六朝才得到其关；要见每朝行里数，请君仔细详推算．”其大意为“某人行路，每天走的路是前一天的一半，6天共走了378里．”则他第六天走　 　里路，前三天共走了　 　里路．

13．在二项式的展开式中，常数项是　 　，所有二项式系数之和是　 　．

14．设椭圆*C*：的左焦点为*F*，直线*l*：*x*﹣*y*+2＝0．动点*P*在椭圆*C*上，记点*P*到直线*l*的距离为*d*，则|*PF*|﹣*d*的最大值是　 　．

15．在△*ABC*中，内角*A*，*B*，*C*的对边分别为*a*，*b*，*c*．若*C*＝2*B*，4*b*＝3*c*，*a*＝1，则sin*A*＝　 　，△*ABC*的面积是　 　．

16．已知*x*，*y*∈**R**，且满足4*x*+*y*+2*xy*+1＝0，则*x*2+*y*2+*x*+4*y*的最小值是　 　．

17．已知平面向量，，，||＝2，||＝3，||＝4，，则||+||的最大值是　 　，最小值是　 　．

**三、解答题：本大题共5小题，共74分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

18．（14分）已知函数．

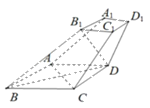
（Ⅰ）求的值；

（Ⅱ）求函数*y*＝*f*（*x*）的最小正周期及其单调递增区间．

19．（15分）如图，在四棱台*ABCD*﹣*A*1*B*1*C*1*D*1中，底面*ABCD*是菱形，∠*ABC*，∠*B*1*BD*，

（Ⅰ）求证：直线*AC*⊥平面*BDB*1；

（Ⅱ）求直线*A*1*B*1与平面*ACC*1所成角的正弦值．



20．（15分）已知等比数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，满足*a*4﹣*a*2＝12，*S*4+2*S*2＝3*S*3，数列{*bn*}满足*b*1＝0，且*n*（*bn*+1+1）﹣（*n*+1）（*bn*+1）＝*n*（*n*+1）（*n*∈**N**\*）

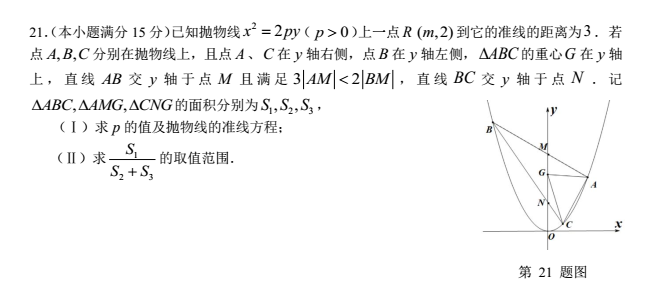
（Ⅰ）求数列{*an*}，{*bn*}的通项公式；

（Ⅱ）设数列前*n*项和为*Tn*，证明：*Tn*＜2（*n*∈**N**\*）．

21．（15分）已知抛物线*x*2＝2*py*（*p*＞0）上一点*R*（*m*，2）到它的准线的距离为3．若点*A*，*B*，*C*分别在抛物线上，且点*A*、*C*在*y*轴右侧，点*B*在*y*轴左侧，△*ABC*的重心*G*在*y*轴上，直线*AB*交*y*轴于点*M*且满足3|*AM*|＜2|*BM*|，直线*BC*交*y*轴于点*N*．记△*ABC*，△*AMG*，△*CNG*的面积分别为*S*1，*S*2，*S*3．

（Ⅰ）求*p*的值及抛物线的准线方程；

（Ⅱ）求的取值范围．



22．（15分）已知函数*f*（*x*）＝（*e*﹣*k*）*elnx*+*kx*，其中*k*＞0，*g*（*x*）＝*ex*．

（Ⅰ）求函数*f*（*x*）的单调区间；

（Ⅱ）证明：当*e*＜*k*＜2*e*2+*e*时，存在唯一的整数*x*0，使得*f*（*x*0）＞*g*（*x*0）．（注：*e*＝2.71828……为自然对数的底数，且*ln*2≈0.693，*ln*3≈1.099．）

**一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1．全集*U*＝{0，1，2，3，4，5，6，7}，集合*A*＝{3，4，5，6}，集合*B*＝{1，3，4}，

则集合∁U*A*＝{0，1，2，7}，∁U*B*＝{0，2，5，6，7}，

集合∁U*A*∩∁U*B*＝{0，2，7}，

故选：*C*．

2．由双曲线的方程可得渐近线为：*yx*，

所以由题意可得：3，

所以离心率*e*，

故选：*A*．

3．画出不等式组表示的平面区域，如图所示

⇒；

∴*C*（，），

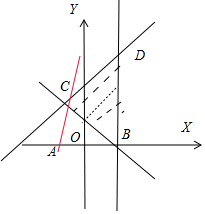
直线*y*＝*a*（*x*+2）过定点*A*（﹣2，0），

直线*y*＝*a*（*x*+2）经过不等式组表示的平面区域有公共点

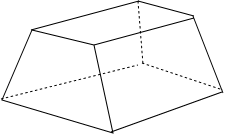
则*a*＞0，*kAC*9，

∴*a*∈[0，9]．

故选：*B*．



4．由三视图知，该几何体是底面为正视图的直四棱柱，如图所示；



结合图中数据，计算该几何体的体积为

*V*＝*Sh*（3+6）×6×6＝162（*cm*3）．

故选：*A*．

5．由⇒*a*⊥*l*或*b*⊥*l*，

由⇒*a*⊥*b*，

故“*a*⊥*b*”是“*a*⊥*l*或*b*⊥*l*”的充要条件，

故选：*C*．

6．因为*f*（*x*）＝*y*＝（1）|*x*|，

所以*f*（﹣*x*）*f*（*x*），

所以函数为奇函数，排除*A*、*B*选项；

，所以排除*C*．

故选：*D*．

7．（1﹣*a*）2+2*a*（1﹣*a*）+*a*2＝1，恒成立，0＜*a*＜1，

依题意*EX*＝2*a*（1﹣*a*）+2*a*2＝2*a*，

*EY*＝（1﹣*a*）2﹣*a*2＝1﹣2*a*，∴*EX*与*EY*不能说明大小关系．

所以*D*（*X*）＝（1﹣*a*）2（0﹣2*a*）2+2*a*（1﹣*a*）（1﹣2*a*）2+*a*2（2﹣2*a*）2

＝2*a*﹣2*a*2．

同理：*D*（*Y*）＝（1﹣*a*）2（2*a*）2+2*a*（1﹣*a*）（1﹣2*a*）2+*a*2（﹣2+2*a*）2＝2*a*﹣2*a*2．

∴*D*（*X*）＝*D*（*Y*），

故选：*D*．

8．∵∠*BAC*＝90°，∠*ADB*＝60°，不妨设*AD*＝1，

∴，

设*B*′到平面*ACD*的距离为*d*，且易知*B*′的轨迹为以*AC*为锥轴，*AB*为母线的圆锥的底面圆周，

∴，当*AB*′⊥*CD*时取得最大值，

∴，

∴α＞β，故排除*A*；

下面比较α与2β的大小：

，且由最小角定理可知，α≤60°，β≤30°，2β≤60°，

∴，

又，

∴sin2β﹣sinα≥0，即α≤2β，故排除*CD*．

故选：*B*．

9．令*y*＝*f*（*x*）＝*xx*，*x*∈（0，）．

则*lny*＝*xlnx*，∴*y*′＝*xx*（*lnx*+1）＜0．

∴函数*f*（*x*）＝*xx*在*x*∈（0，）上单调递减．

∵0＜*a*＜*b*，∴*aa*＞*bb*，即．

∵0＜*a*＜*b*，利用指数函数幂函数的单调性可得：，，

∴，

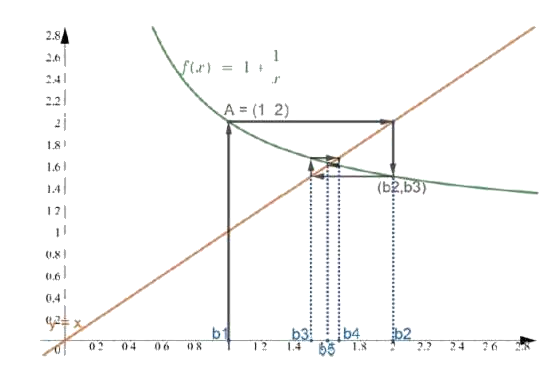
故选：*A*．

10．由，得，

，

令*bn*，即*an*＝*lnbn*，则，*a*1＝0，∴*b*1＝1，

作图如下：



由图得：

①{*b*2*n*﹣1}单调递增，{*b*2*n*}单调递减，

*an*＝*lnbn*，故*A*正确；

②∵*bn*∈[1，2]，∴*bnbn*+1＝*bn*（1）＝*bn*+1∈[2，3]，

∴*bnbn*+1∈[2，3]，

∴*an*+*an*+1∈[*ln*2，*ln*3]，故*B*正确；

③∵*an*+*an*+1≥*ln*2，∴*S*2020＝（*a*1+*a*2）+…+（*a*2019+*a*2010）≥1010•*ln*2＞693，故*C*错误．

④由不动点（），得1，，

∴*b*2*n*＞*b*2*n*﹣1，∴*a*2*n*＞*a*2*n*﹣1，故*D*正确．

故选：*C*．

**二、填空题：本大题共7小题，多空题每题6分，单空题每题4分，共36分．**

11．复数*z*，则|*z*|．

故答案为：．

12．每天走的路形成等比数列{*an*}，公比*q*，*S*6＝378．

∴378，解得*a*1＝192．

∴*a*6＝1926，*S*3336．

故答案为：192，336．

13．二项式的展开式中，常数项为：（﹣1）4＝15；

二项式的展开式中所有二项式系数之和为26＝64．

故答案为：15；64．

14．椭圆*C*：的左焦点为*F*（﹣1，0），右焦点*F*′（1，0），

直线*l*：*x*﹣*y*+2＝0．动点*P*在椭圆*C*上，由椭圆的定义可知|*PF*|+|*PF*′|＝2，记点*P*到直线*l*的距离为*d*，

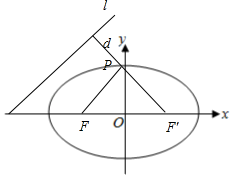
则|*PF*|﹣*d*＝2*d*﹣|*PF*′|＝2（*d*+|*PF*′|），

当*d*+|*PF*′|最小时，|*PF*|﹣*d*取得最大值，

所以*d*+|*PF*′|最小值为：，

则|*PF*|﹣*d*的最大值是：2．

故答案为：．



15．因为*C*＝2*B*，4*b*＝3*c*，

由正弦定理可得，，即，

所以cos*B*，sin*B*，

故sin*C*＝sin2*B*＝2sin*B*cos*B*，cos*C*＝cos2*B*＝2cos2*B*﹣1，

∴sin*A*＝sin（*B*+*C*）＝sin*B*cos*C*+sin*C*cos*B*，

由正弦定理可得，，

即，故*b*，

∴*S*△*ABC*．

故答案为：，

16．由4*x*+*y*+2*xy*+1＝0，得（2*x*+1）（*y*+2）＝1，

令2*x*+1＝*m*，*y*+2＝*n*，则*mn*＝1．

∴*x*2+*y*2+*x*+4*y*．①

当且仅当，即*xy*+2，

联立，解得或，说明①中“＝”成立．

∴*x*2+*y*2+*x*+4*y*的最小值是．

故答案为：．

17．∵，

∴，

而，

其中，表示在上的投影，表示在上的投影，

向量和向量在一个线上，投影之和的最大值为|*OB*|，即经过点*B*时，，

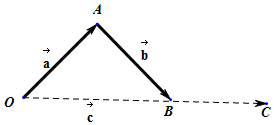
∴最大值为；

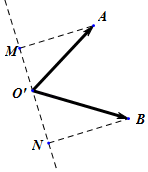
接下来求|*MN*|的最小值，|*O*′*M*|随着角度的变化要小于|*O*′*N*|，故当*O*′*N*⊥*O*′*B*时，|*MN*|有最小值，

此时，其中，

∴最小值为．

故答案为：．





**三、解答题：本大题共5小题，共74分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

18．（Ⅰ）由

可得：，

，

，

，

则．

（Ⅱ）由（Ⅰ）知：，

函数*y*＝*f*（*x*）的最小正周期为*T*＝π，

又 由，

解得

因此函数*y*＝*f*（*x*）的单调递增强区间为（*k*∈**Z**）

19．（*I*）方法一：连接*AC*，*BD*交于*O*，

因为*BC*＝*BA*，∠*B*1*BA*＝∠*B*1*BC*，*B*1*B*＝*BB*1，

所以△*B*1*BC*≌△*B*1*BA*，故*B*1*A*＝*B*1*C*；…………………（2分）

又因为*O*为菱形对角线交点，即是线段*AC*的中点，所以*B*1*O*⊥*AC*；……

又四边形*ABCD*为菱形，故*AC*⊥*BD*；

而*B*1*O*∩*BD*＝*O*，所以*AC*⊥平面*BDB*1；………………………………………

方法二：因为∠*B*1*BA*＝∠*B*1*BC*，

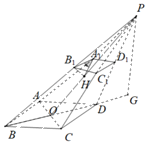
所以点*B*1在平面*ABCD*内的射影*O*在为∠*ABC*的平分线，………………………（2分）

又四边形*ABCD*为菱形，故*BD*为∠*ABC*的平分线，则*O*∈直线*BD*，………………

故平面*BDB*1⊥平面*ABCD*，而平面*BDB*1∩平面*ABCD*＝*BD*，

又四边形*ABCD*为菱形，故*AC*⊥*BD*，

所以*AC*⊥平面*BDB*1；………………………………………



（Ⅱ）方法一：延长*AA*1，*BB*1，*CC*1，*DD*1交于点*P*，平面*BDB*1即为平面*BDP*，平面*ACC*1即平面*ACP*，

由（*I*）得平面*ACP*⊥平面*BDP*，*OP*＝平面*ACP*∩平面*BDP*，

所以过*B*1作*B*1*H*⊥*OP*，则*B*1*H*⊥平面*ACP*，故∠*B*1*A*1*H*即为直线*A*1*B*1与平面*ACC*1所成角；…………（10分）

（若研究直线*AB*与平面*ACC*1所成角的正弦值则线段等比例扩大2倍结果不变）

因为四棱台*ABCD*﹣*A*1*B*1*C*1*D*1中*AB*＝2*A*1*B*1＝2，所以*A*1*B*1＝1，*BP*＝6；

因为*AB*＝*BC*＝2，所以，

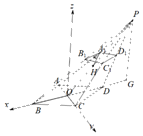
作*PG*⊥*BD*，因为，则，*PG*＝3，

所以，…………（12分）

所以cos∠*BPO*，，，…………（14分）

所以． …………（15分）

方法二：延长*AA*1，*BB*1，*CC*1，*DD*1交于点*P*，



平面*BDB*1即为平面*BDP*，平面*ACC*1即平面*ACP*，

设直线*A*1*B*1与平面*ACC*1所成角为θ，

过*P*作*PG*⊥*BD*，垂足为*G*，因为*BP*＝6，所以；

建立空间直角坐标系如下，以*OB*，*OC*为*x*，*y*轴，作*z*轴∥*GP*，…………（9分）

则；

所以，，；………（11分）

设平面*ACP*的法向量为，则，化简得；

所以，…………（13分）

所以cos，；

所以．…………（15分）

20．（*I*）由*S*4+2*S*2＝3*S*3，得*S*4﹣*S*3＝2（*S*3﹣*S*2）

即*a*4＝2*a*3，*q*＝2．

又*a*4﹣*a*2＝12故*a*1＝2，所以．

由*nbn*+1﹣（*n*+1）*bn*＝*n*（*n*+1）两边同除以*n*（*n*+1），

得，

从而数列为首项*b*1+1＝1，公差*d*＝1的等差数列．

所以，

从而数列{*bn*}的通项公式为．

证明：（Ⅱ）由（*I*）知．

令，数列{cn}之和为*Sn*，则*Tn*＜*Sn*

因为*Sn*＝*c*1+*c*2+*c*3+…+cn

则，

两式相减得，

．

整理得．

所以*Tn*＜*Sn*＜2．

21．（*I*）由抛物线的定义可知，*p*＝2，所以抛物线方程*x*2＝4*y*，

所以*p*＝2，抛物线的准线方程：*y*＝﹣1；

（Ⅱ）设点*A*（*x*1，*y*1），*B*（*x*2，*y*2），*C*（*x*3，*y*3），*x*1＞0，*x*2＜0，*x*3＞0

，

点*G*为△*ABC*的重心，所以，

且*x*1+*x*2+*x*3＝0，

，

令，所以，

因为3|*AM*|＜2|*BM*|，所以3*x*1＜﹣2*x*2，故，，

因此，

故所以．

22．（Ⅰ）函数的定义域为（0，+∞），，

若0＜*k*≤*e*，则，函数*f*（*x*）在区间（0，+∞）上单调递增，

若*k*＞*e*，，当时，*f*′（*x*）＜0，此时函数*f*（*x*）单调递减，

当时，*f*′（*x*）＞0，此时函数*f*（*x*）单调递增；

（Ⅱ）证明：当*x*0＝1时，*f*（1）＝*k*＞*e*＝*g*（1），即存在*x*0＝1，使得*f*（*x*0）＞*g*（*x*0）；

当*x*0＝2时，*f*（2）﹣*g*（2）＝（*e*﹣*k*）*eln*2+2*k*﹣*e*2，令*m*（*k*）＝（*e*﹣*k*）*eln*2+2*k*﹣*e*2，

因为*m*（*k*）是关于*k*的一次函数，

所以，其中*m*（*e*）＝2*e*﹣*e*2＜0，*m*（2*e*2+*e*）＝*e*（3*e*+2﹣2*e*2*ln*2），

又3*e*+2﹣2*e*2*ln*2＝2﹣*e*（2*eln*2﹣3）＜2﹣2.71×（2×2.71×0.69﹣3）＝﹣0.004858＜0，

所以*m*（*k*）*max*＜0，即*x*0＝2不符合题意；

因为讨论的是整数解问题，所以接下来若能证明*x*≥*e*时，不符合题意即可，

当*x*≥*e*时，令*h*（*x*）＝*g*（*x*）﹣*f*（*x*）＝*ex*﹣（*e*﹣*k*）*elnx*﹣*kx*，则，

令，则，

由*k*＞*e*易知*t*′（*x*）在[*e*，+∞）上单调递增，则，

所以*t*（*x*）在[*e*，+∞）上单调递增，则，

所以*h*′（*x*）＞0，即*h*（*x*）在[*e*，+∞）上单调递增，则*h*（*x*）≥*h*（*e*）＝*ee*﹣（*e*﹣*k*）*elne*﹣*ek*＝*ee*﹣*e*2＞0，即*g*（*x*）＞*f*（*x*），不符合题意．

综上所述，当*e*＜*k*＜2*e*2+*e*时，存在唯一的整数*x*0＝1，使得*f*（*x*0）＞*g*（*x*0）．