宁波市 2019 学年第二学期高考适应性考试

数　学

2020. 5

参考公式:

如果事件 A、B 互斥,那么:$P(A+B)=P(A)+P(B)$

如果事件 A、B 相互独立,那么:$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p,那么 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率:

$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$

柱体的体积公式:$V=Sh$　　其中 S 表示柱体的底面积,h 表示柱体的高

锥体的体积公式:$V=\frac{1}{3}Sh$　　其中 S 表示锥体的底面积,h 表示锥体的高

台体的体积公式:$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$　　其中 S_1,S_2 分别表示台体的上、下底面积,h 表示台体的高

球的表面积公式:$S=4\pi R^2$　　其中 R 表示球的半径

球的体积公式:$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分. 每小题给出的选项中只有一个是符合题目要求的,不选、多选、错选均不得分)

1. 已知全集 $U=\{-2,-1,0,1,2,3\}$,集合 $A=\{-1,0,1\}$,$B=\{-1,1,2\}$,则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$(　　)

A. $\{-1,1\}$　　B. $\{-2,3\}$　　C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{-2,0,2,3\}$

2. 已知复数 z 是纯虚数,满足 $z(1-i)=a+2i$(i 为虚数单位),则实数 a 的值是　(　　)

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

3. 已知实数 x,y 满足约束条件$\begin{cases}x\geqslant 1\\ x+y\leqslant 4\\ y\geqslant 3x-5\end{cases}$,则 $z=3x+y$ 的最大值是　(　　)

A. 6　　B. $\frac{15}{2}$　　C. $\frac{17}{2}$　　D. $\frac{25}{3}$

4. 已知$\triangle ABC$ 中角 A、B、C 所对的边分别是 a,b,c,则"$a^2+b^2=2c^2$"是"$\triangle ABC$ 为等边三角形"的　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

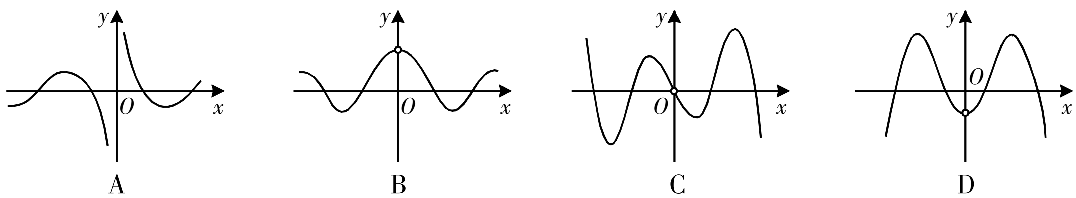
5. 已知随机变量 X 的分布列如右表,其中 $a\leqslant 2b\leqslant 6a$,则 $E(X)$的取值范围是　(　　)

X	-1	0	1
P	a	$\frac{1}{3}$	b

第 5 题表

A. $[\frac{4}{9},1]$　　B. $[-\frac{2}{9},\frac{1}{3}]$　　C. $[\frac{1}{3},\frac{5}{9}]$　　D. $[-\frac{1}{3},\frac{4}{9}]$

6. 函数 $y=\cos x\cdot\frac{2^x+1}{2^x-1}$ 的部分图象大致为　(　　)



7. 设 $a,b\in\mathbf{R}$,无穷数列$\{a_n\}$满足:$a_1=a$,$a_{n+1}=-a_n^2+ba_n-1$,$n\in\mathbf{N}^*$,则下列说法中不正确的是 (　　)

A. $b=1$ 时,对任意实数 a,数列$\{a_n\}$单调递减

B. $b=-1$ 时,存在实数 a,使得数列$\{a_n\}$为常数列

C. $b=-4$ 时,存在实数 a,使得$\{a_n\}$不是单调数列

D. $b=0$ 时,对任意实数 a,都有 $a_{2020}>-2^{2018}$

8. 若正实数 x、y 满足 $x-2\sqrt{y}=\sqrt{2x-y}$，则 x 的取值范围是 (　　)

A. $[4,20]$　　B. $[16,20]$　　C. $(2,10]$　　D. $(2,2\sqrt{5}]$

9. 点 M 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上，以 M 为圆心的圆与 x 轴相切于椭圆的焦点，与 y 轴相交于 P,Q，若 $\triangle MPQ$ 是钝角三角形，则椭圆离心率的取值范围是 (　　)

A. $(0,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})$　　B. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　C. $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　D. $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$

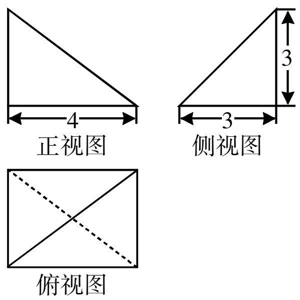
10. 在正四面体 $S-ABC$ 中，点 P 在线段 SA 上运动(不含端点). 设 PA 与平面 PBC 所成角为 θ_1，PB 与平面 SAC 所成角为 θ_2，PC 与平面 ABC 所成角为 θ_3，则 (　　)

A. $\theta_2<\theta_1<\theta_3$　　B. $\theta_2<\theta_3<\theta_1$　　C. $\theta_3<\theta_1<\theta_2$　　D. $\theta_3<\theta_2<\theta_1$

二、填空题(本大题共 7 小题，多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分，共 36 分)

11. $(ax+\frac{1}{x})(2x-1)^5$ 的展开式中各项系数的和为 2，则实数 $a=$____________，该展开式中常数项为____________.

12. 一个四面体的三视图如图所示(单位 cm)，则该四面体体积(单位 cm³)为____________，外接球的表面积(单位 cm²)为____________.



第 12 题图

13. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{4},0)$ 对称，关于直线 $x=-\frac{\pi}{4}$ 对称，最小正周期 $T\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，则 $T=$____________，$f(x)$ 的单调递减区间是____________.

14. 已知过抛物线 $C_1:y^2=2px(p>0)$ 焦点 F 的直线与抛物线交于 A,B 两点，其中 $A(4,4\sqrt{2})$，双曲线 $C_2:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 过点 A,B，则 p 的值是____________，双曲线 C_2 的渐近线方程是____________.

15. 某会议有来自 6 个学校的代表参加，每个学校有 3 名代表. 会议要选出来自 3 个不同学校的 3 人构成主席团，不同的选取方法数为____________.

16. 函数 $f(x)=\begin{cases}x^3,0\leqslant x\leqslant 1\\3+\log_{\frac{1}{2}}x,1<x\leqslant 32\end{cases}$，$g(x)=2x^2-x$，若 $y=g(f(x))-t$ 恰有 3 个零点，则实数 t 的取值范围是____________.

17. 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=4,AD=3$，动点 M、N 分别在射线 CB、CD 上运动，且满足 $\frac{1}{CM^2}+\frac{1}{CN^2}=1$. 对角线 AC 交 MN 于点 P，设 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，则 $x+y$ 的最大值是____________.

三、解答题(本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (本题满分 14 分)已知 $\triangle ABC$ 中角 A、B、C 所对的边分别是 a,b,c，且 $2a\cos A=\sqrt{3}(c\cos B+b\cos C)$.

(Ⅰ)求 A 的值.

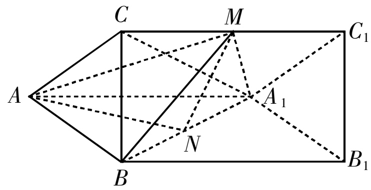
(Ⅱ)若 $a=1$ 且 $\sin B+\cos C=\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

19. (本题满分 15 分)已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，M、N 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，$\triangle ABA_1$ 为等边三角形，$CA=CA_1$，$A_1A=A_1M=2BC$.

(Ⅰ)求证：$MN /\!/$ 平面 ABC.

(Ⅱ)(ⅰ)求证：$BC\perp$ 平面 ABB_1A_1.

(ⅱ)求二面角 $A-MN-B$ 的正弦值.



20. (本题满分 15 分)已知正项数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，其前 n 项和为 S_n，且 a_n 与 a_{n+1} 的等比中项是 $\sqrt{2S_n}$，数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{a_n}{2a_{n+2}}$.

(Ⅰ)求 a_2, a_3，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(Ⅱ)记 $c_n=\sqrt{\dfrac{b_n}{a_n}}$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：$c_1+c_2+\cdots+c_n<2\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

21. (本题满分 15 分)已知椭圆 Γ：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点 F_1,F_2 的距离为 $2\sqrt{3}$，过 F_2 且垂直于 x 轴的直线交椭圆 Γ 于 A,B 两点，且 $|AB|=1$.

(Ⅰ)求椭圆 Γ 的方程.

(Ⅱ)若存在实数 t，使得经过相异两点 $P(4t,t^2+h)$ 和 $Q(2t+2,t+h)$ 的直线交椭圆 Γ 所得弦的中点恰为点 Q，求实数 h 的取值范围.

22. (本题满分 15 分)已知实数 $a\neq 0$，函数 $f(x)=\ln|ax|-\frac{\sqrt{x}}{a}+1$.

(Ⅰ)证明：对任意 $a\in(0,+\infty)$，$f(x)\leqslant 3a-\frac{5}{2}$ 恒成立.

(Ⅱ)如果对任意 $x\in(0,+\infty)$ 均有 $f(x)\leqslant\frac{x-a}{x+a}$，求 a 的取值范围.