2020学年金丽衢十二校高三第一次联考

数学评分标准与参考答案

一、选择题（4×10=40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	D	D	A	B	C	C	A	B

二、填空题（9—12题每题6分，13—15题每题4分，共36分）

11．-6，$3\sqrt{5}$；　12．1，-2；　13．$\frac{\pi}{2}$，$\left[0,\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right]$；　14．1，$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$；

15．150；　16．$\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$；　17．$-1$.

三、解答题：本大题共5小题，共74分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18．解：(1) 由$\cos A-\sin A=-\frac{1}{5}$，且$A$为锐角，求得$\cos A=\frac{3}{5}$，$\sin A=\frac{4}{5}$.-------------(7分)

(2) 根据面积公式$S=\frac{1}{2}bc\sin A$可求得$bc=50$，所以$c=10$，$b=5$，--------------------(11分)

又由余弦定理求得$a^2=100+25-2\times50\times\frac{3}{5}=65$，所以$a=\sqrt{65}$.-----------------------(14分)

19．解：(I) 证：取BC中点E，连接AE和C_1E

设$AC_1=\sqrt{2}AB=\sqrt{2}AC=\sqrt{2}$　∵$AB\perp AC$，$AB=AC=1$且E是BC中点

∴$AE=\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$且$AE\perp BC$　又∵$AC_1\perp BC$　$AC_1\cap AE=A$　∴$BC\perp$面AEC_1

∴$BC\perp C_1E$　又E是BC中点

所以$C_1B=C_1C$

又$\angle CBB_1=120°\Rightarrow\angle C_1CB=60°$

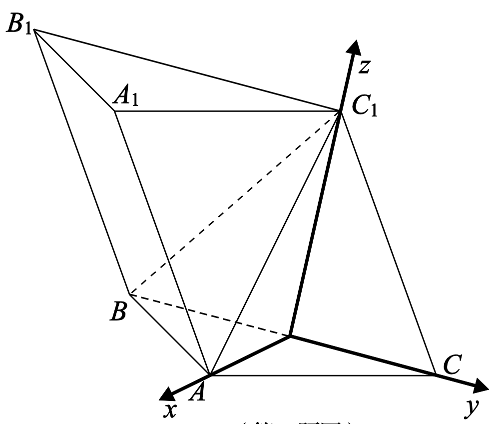
∴$\triangle C_1CB$是等边三角形

∴$C_1E=\frac{\sqrt{6}}{2}$

即$C_1E^2+AE^2=AC_1^2$

所以$C_1E\perp AE$

又∵$BC\perp C_1E$



（第19题图）

且$BC \cap AE = E$

∴ $C_1E \perp$ 面ABC

又∵ $C_1E \subset$ 面BB_1C_1C

∴ 平面$ABC \perp$ 平面BB_1C_1C --(7 分)

(II) 如图，以 E 为原点，射线 EA 为 x 轴，射线 EC 为 y 轴，建立空间直角坐标系，

设$AC_1 = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}AC = 2$

则$A(1,0,0), B(0,-1,0), C(0,1,0), C_1(0,0,\sqrt{3}), B_1(0,-2,\sqrt{3})$

∴ $\overrightarrow{B_1C_1} = (0,2,0), \overrightarrow{BC_1} = (0,1,\sqrt{3}), \overrightarrow{BA} = (1,1,0)$--(9分)

设面ABC_1的一个法向量$\vec{n} = (x,y,z)$

则$\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1} = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = 0 \end{cases}$ 得$\vec{n} = (\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$--(12分)

设所求角为θ

则$\sin\theta = \left|\cos<\vec{n},\overrightarrow{B_1C_1}>\right| = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

故直线B_1C_1与平面ABC_1所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.--(15分)

20．解:

(1) 由 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{2n+1}{2^{n+1}}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$知$2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + 2n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$

令$b_n = 2^n a_n$，则$b_1 = 1$且$b_{n+1} = b_n + 2n+1\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$-----------------------------------(4 分)

由$b_n = \left(b_n - b_{n-1}\right) + \left(b_{n-1} - b_{n-2}\right) + \cdots + \left(b_2 - b_1\right) + b_1 = \left(2n-1\right) + \cdots + 3 + 1 = n^2$ -----(7 分)

(2) 易知$a_n = \dfrac{n^2}{2^n}$，于是$S_n = \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \dfrac{4}{2^4} + \cdots + \dfrac{(n-1)}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}$

所以$\dfrac{1}{2}S_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{2^3} + \dfrac{3}{2^4} + \dfrac{4}{2^5} + \cdots + \dfrac{(n-1)}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^{n+1}}$ -----------------------------------(12 分)

两式相减得$\dfrac{1}{2}S_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^5} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} - \dfrac{n}{2^{n+1}} < 1$，即$S_n < 2$得证.----(15 分)

21．解:

(I) 当$AF \perp x$轴时，$A\left(\frac{p}{2},p\right), B\left(\frac{p}{2},-p\right)$

故圆的方程为$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2$

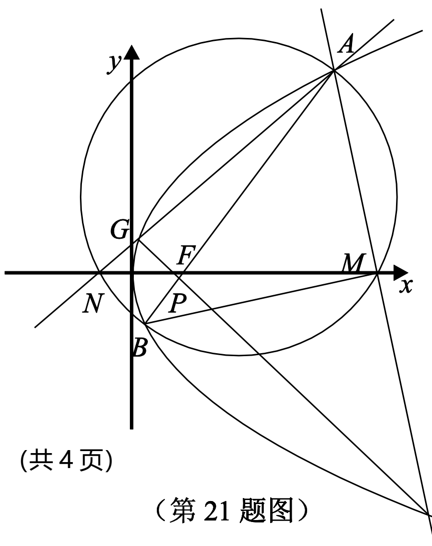
即$|MN| = |AB| = 2p = 4$,得$p = 2$---(4 分)

故抛物线C的方程为$y^2 = 4x$;--------(5 分)

(II) 设点$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), M(x_3,0), N(x_4,0)$

直线AB: $x = my + 1$

联立$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases}$



（第 21 题图）

得：$y^2-4my-4=0$

$\Delta=16(m^2+1)$

$y_1+y_2=4m, y_1\cdot y_2=-4$ --(7 分)

$y_1=\frac{4m+4\sqrt{m^2+1}}{2}=2m+2\sqrt{m^2+1}$

$\therefore x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$ ---(8 分)

故圆心（$2m^2+1$，$2m$） --(9 分)

半径 $r=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+1}\frac{\sqrt{16(m^2+1)}}{1}=2(m^2+1)$

即圆的方程为$(x-2m^2-1)^2+(y-2m)^2=4(m^2+1)^2$

令$y=0$，则$(x-2m^2-1)^2+4m^2=4(m^2+1)^2$

化简得：$x^2-(4m^2+2)x-3=0$

$x_3+x_4=4m^2+2, x_3\cdot x_4=-3$ ---(11 分)

若B,H,P,M四点共圆,则$\angle BPH=\angle BMH=90°$

即B,H,P,M四点共圆等价于$HG\perp AB$ --(12 分)

下证：存在唯一直线AB满足$HG\perp AB$

设$H(x_5,y_5),B(x_6,y_6)$

直线AM：$x-x_1=t_1(y-y_1)$和直线AN：$x-x_1=t_2(y-y_1)$

联立$\begin{cases} y^2=4x \\ x-x_1=t_1(y-y_1) \end{cases}$

得：$y^2-4t_1y+4t_1y_1-4x_1=0$

$y_1+y_5=4t_1\Rightarrow y_5=4t_1-y_1$　　同理，　$y_1+y_6=4t_2\Rightarrow y_6=4t_2-y_1$

$\therefore k_{HG}=\frac{y_6-y_5}{x_6-x_5}=\frac{y_6-y_5}{\frac{y_6^2-y_5^2}{4}}=\frac{4}{y_6+y_5}=\frac{4}{4(t_1+t_2)-2y_1}$

又$\because t_1=\frac{x_1-x_3}{y_1}, t_2=\frac{x_1-x_4}{y_1}$

$\therefore k_{HG}=\frac{4}{4\frac{2x_1-x_3-x_4}{y_1}-2y_1}=-\frac{y_1}{x_3+x_4}=-\frac{m+\sqrt{m^2+1}}{2m^2+1}$

又$k_{AB}=\frac{1}{m}\Rightarrow k_{HG}=-m=-\frac{m+\sqrt{m^2+1}}{2m^2+1}\Rightarrow 2m^3+m=m+\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 2m^3=\sqrt{m^2+1}\Rightarrow 4m^6-m^2-1=0$

设$f(x)=4x^3-x-1, x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=12x^2-1$

故$f(x)$在（0，$\frac{\sqrt{3}}{6}$）单调减，（$\frac{\sqrt{3}}{6}$，$+\infty$）单调增

又$\because f(0)=-1<0$，$f(\frac{\sqrt{3}}{6})<0$，且 $f(1)=2>0$，

故存在唯一$x\in\left(0，+\infty\right)$满足$f(x)=0$

即存在唯一$m\in(0,+\infty)$,满足$4m^6-m^2-1=0$

综上结论得证。 --(15 分)

22．解：

（1）$f'(x)=1+\ln x$，所以$f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ --(5 分)

（2）$g'(x)=(1-k)+\ln x$，所以$g(x)$在$(0,e^{k-1})$递减， 在$(e^{k-1},+\infty)$递增，所以$\frac{g(M)}{N}<0$，---(8 分)

要证 $g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>-\ln\sqrt{2}^{|x_1-x_2|}$， 不妨设$0<x_1<x_2$

由$x_1\ln x_1-kx_1-b=0$，$x_2\ln x_2-kx_2-b=0$ 得$\frac{x_1\ln x_1+x_2\ln x_2}{2}-k\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-b=0$，---(10 分)

即证 $g(M)=\frac{x_1+x_2}{2}\ln\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1\ln x_1+x_2\ln x_2}{2}>-\frac{x_2-x_1}{2}\ln 2$

即证 $(x_1+x_2)\ln(x_1+x_2)-(x_1+x_2)\ln 2-x_1\ln x_1-x_2\ln x_2>(x_1-x_2)\ln 2$

即证$x_1\ln\frac{x_1+x_2}{2x_1}+x_2\ln\frac{x_1+x_2}{2x_2}>(x_1-x_2)\ln 2$

又由于 $(x_1+x_2)^2>4x_1x_2$，$\ln\frac{x_1+x_2}{2x_1}>\ln\frac{2x_2}{x_1+x_2}$，

所以只需证$x_1\ln\frac{2x_2}{x_1+x_2}+x_2\ln\frac{x_1+x_2}{2x_2}>(x_1-x_2)\ln 2$

即证明$(x_1-x_2)\ln\frac{2x_2}{x_1+x_2}>(x_1-x_2)\ln 2$，

即证$2x_2<2x_1+2x_2$，

该式显然成立，于是原命题得证. --(15 分)