诸暨市 2021 年 5 月高三适应性考试试题
数　学

注意：1．本试题卷分选择题和非选择题两部分．全卷共 4 页,满分 150 分，考试时间 120 分钟．

2．请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上．

参考公式：

球的表面积公式

$S=4\pi R^2$

球的体积公式

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$

其中 R 表示球的半径

柱体的体积公式

$V=sh$

其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$V=\frac{1}{3}Sh$

其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

台体的体积公式

$V=\frac{1}{3}h\left(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2\right)$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积，

h 表示台体的高

第Ⅰ卷（选择题部分　共 40 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合满足 $\{1,2\}\subseteq A\subseteq\{1,2,3\}$，则集合 A 可以是（ ▲ ）

A．$\{3\}$　　B．$\{1,3\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{1,2\}$

2．已知 x,y 为正实数，则（ ▲ ）

A．$\lg(x^2\cdot y)=(\lg x)^2+\lg y$　　B．$\lg(x\cdot\sqrt{y})=\lg x+\frac{1}{2}\lg y$

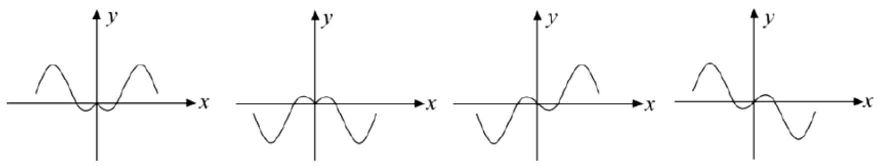
C．$e^{\ln x+\ln y}=x+y$　　D．$e^{\ln x\cdot\ln y}=xy$

3．已知 z 是复数，i 是虚数单位，则“$z=-i$”是“$z^2=-1$”的（ ▲ ）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．函数 $f(x)=\frac{(1-x^2)\sin x}{e^x+e^{-x}}$ 的部分图象是（ ▲ ）



A.　　B.　　C.　　D.

5. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$的渐近线过点$(2a,c)$，则该双曲线的离心率为（ ▲ ）

A. $\sqrt{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. 2　　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x+y-2\geq 0,\\ x-y\geq 0\end{cases}$，则$z=|2x+y|$的取值范围是（ ▲ ）

A. $[3,+\infty)$　　B. $[4,+\infty)$　　C. $[0,3]$　　D. $[0,4]$

7. 设$m,n>0$,若随机变量ξ,η的分布列如下：

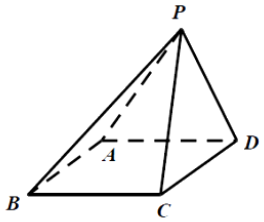
ξ	-1	0	2
η	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
P	m	$\frac{1}{2}$	n

则下列说法错误的是（ ▲ ）

A. $m+n=\frac{1}{2}$　　B. $P(\xi>0)<P(\eta>0)$

C. $E(\xi)<E(\eta)$　　D. $D(\xi)<D(\eta)$

8. 已知底面$ABCD$为正方形的四棱锥$P-ABCD$，P点的射影在正方形$ABCD$内，且P到BC的距离等于PD的长，记二面角$P-AB-C$的平面角为α，二面角$P-CD-A$的平面角为β，二面角$P-AD-C$的平面角为γ，则下列结论可能成立的是（ ▲ ）



A. $\alpha=\beta=\gamma$　　B. $\alpha=\gamma<\beta$

C. $\alpha=\beta<\gamma$　　D. $\alpha>\beta=\gamma$

9. 已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_n>0,a_1=1$,公差为d，数列$\{b_n\}$满足$b_n=e^{a_n-2}+e^{2-a_n}$，若对任意的$n\in N^*$，都有$b_n\geq b_5$，则公差d的取值范围是（ ▲ ）

A. $[\frac{2}{11},\frac{2}{9}]$　　B. $[\frac{2}{9},\frac{2}{7}]$　　C. $[\frac{2}{11},\frac{2}{7}]$　　D. $[\frac{2}{9},\frac{2}{5}]$

10. 已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(0<a<b)$没有极值点，则$\frac{b-a}{a+b+c}$的最大值为（ ▲ ）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $2\sqrt{5}-3$　　C. $\frac{2}{7}$　　D. $2\sqrt{7}-5$

第Ⅱ卷（非选择题部分　共 110 分）

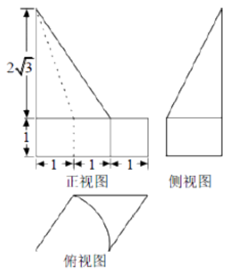
二、填空题：本题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分.

11. 已知角 α 的终边过点 $(1,2)$，则 $\tan\alpha=$ ▲ ，$\sin 2\alpha=$ ▲ .

12. 已知 $(x+2)^6=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_6(x+1)^6$，则 $a_3=$ ▲ ；$a_0+a_2+a_4+a_6=$ ▲ .

13. 抛物线的弦与过弦的端点的两条切线所围成的三角形常称为阿基米德三角形，因为阿基米德最早利用逼近的思想证明了：抛物线的弦与抛物线所围成的封闭图形的面积等于阿基米德三角形面积的 $\frac{2}{3}$. 已知 $A(-2,1),B(2,1)$ 为抛物线 $C:x^2=4y$ 上两点，则在 A 点处抛物线 C 的切线的斜率为 ▲ ；弦 AB 与抛物线所围成的封闭图形的面积为 ▲ .

14. 某几何体的三视图如图所示，俯视图为平行四边形，内部图形为扇形，正视图、侧视图上方为直角三角形，下方为矩形，则三视图中侧视图的面积为 ▲ ；该几何体的体积为 ▲ .



15. 已知 P 是圆 $C:x^2+y^2=1$ 上一点，动点 A，B 的坐标为 $A(t,0)$，$B(t+4,3)$，其中 $t\in\mathbf{R}$. 若恰好存在一个点 P，使得 $PA\perp PB$，则 $t=$ ▲ .

16. 把编号为 $i(i=1,2,3,4,5)$ 的五个小球随机放入编号为 $j(j=1,2,3,4,5)$ 的五个盒子，每盒一个小球，若满足 $|i-j|\le 2$，则不同的放法共有 ▲ 种.

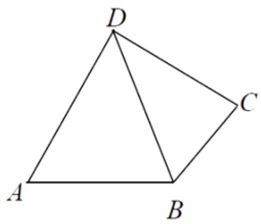
17. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足：$|\vec{a}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{b}|$，则 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}$ 的最大值是 ▲ .

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

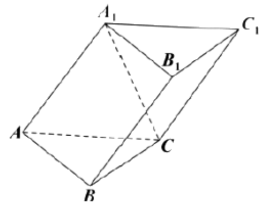
18. 如图，已知平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD=1$.

(1)若 $AD=\sqrt{2}$，$\angle ADB=\frac{\pi}{4}$，求 ΔABD 的面积；

(2)若 $BC=t$，$AD=\sqrt{2}\,t$，$\angle C-\angle A=\frac{\pi}{4}$，求 t 的最大值.



19．如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 各棱长均为2，$\angle A_1AB=60^\circ$.



(1)求证：$AB\perp A_1C$；

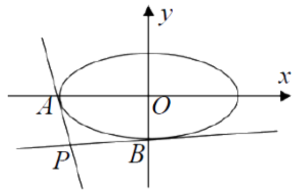
(2)若二面角 A_1-AB-C 为 60°，求 A_1C_1 与平面 ABB_1A_1 所成角的正弦值.

20．已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 满足：$a_1=1, a_{n+1}=\lambda a_n+n+1, (n\in N^*, \lambda\in R)$，$b_n=\frac{1}{a_n}$，数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 S_n.

(1)若 $\lambda=1$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及 S_n；

(2)若 $\lambda=2$，求证：$S_n<\frac{3}{2}$.

21．已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且过点 $(\sqrt{3},\frac{1}{2})$.



(1)求椭圆C的方程；

(2)过椭圆C外一点 $P(x_0,y_0)$ 作椭圆的两条切线，切点分别为 A,B，记 PA，PB 的斜率分别为 k_1,k_2，且 $k_1\cdot k_2=-\frac{1}{4}$.

①求 P 点轨迹方程；

②求证：ΔPAB 的面积为定值.

（参考公式：过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一点 (x_1,y_1) 的切线方程为 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$）

22．已知函数 $f(x)=x-a\ln x-1$，$(a\in R)$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)已知函数 $g(x)=\frac{1}{2}x^2-ax\ln x+(a-1)x$

①若 $g(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，求实数 a 的取值范围；

②若 $g(x)$ 的一个极值点为 x_1，且 $x_1\in(1,+\infty)$，求 $g(x_1)$ 的最大值.

诸暨市 2021 年 5 月高三适应性考试数学答案 2021.5

一．选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	B	A	D	B	A	C	C	B	D

二．填空题

11. 2；$\dfrac{4}{5}$　　　　12. 20 ；32　　　　13. -1；$\dfrac{8}{3}$

14. $3+\sqrt{3}$ ；$2\sqrt{3}+\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\pi$　　　15. -2或$-2\pm\sqrt{10}$　　　16. 31　　　17. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

三．解答题

18. 解：（1）　$\because \sin\angle ABD=\dfrac{\sin\angle ADB}{AB}\cdot AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1$　　　……3′

$\therefore \angle ABD=\dfrac{\pi}{2},\angle BAD=\dfrac{\pi}{4}$　　　……2′

$\therefore S_{\Delta ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$　　　……2′

（2）$\Delta ABD,\Delta CBD$ 中，由余弦定理得：

$BD^2=1+t^2-2t\cdot\cos C$　　　……2′

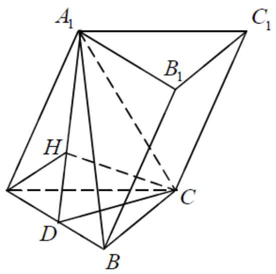
$BD^2=1+2t^2-2\sqrt{2}t\cdot\cos A$　　　……2′

$\therefore t=2\sqrt{2}\cos A-2\cos C=2\sqrt{2}\cos A-2\cos(A+\dfrac{\pi}{4})$　　　……1′

$\therefore t=2\sin(A+\dfrac{\pi}{4})\le 2$　　　……1′

$\therefore A=\dfrac{\pi}{4},C=\dfrac{\pi}{2}$时，$t$ 的最大值是 2 .　　　……1′

19. （1）证明：取 AB 中 D 点,连接 A_1D,CD,A_1B，　　　……1′



$\therefore$ 正 ΔA_1AB 和正 ΔABC 中：

$\therefore \left.\begin{matrix} AB\perp A_1D \\ AB\perp CD \\ A_1D\cap CD=D \end{matrix}\right\}\Rightarrow AB\perp$面 $_1AA$　　　……4′

$\therefore AB\perp A_1C$　　　……1′

(2)法一：作CH垂直A_1D于H，连AH　　　……1′

由 $AB\perp$ 面A_1DC 可得 $\angle A_1DC$ 为二面角 A_1-AB-C 的平面角，

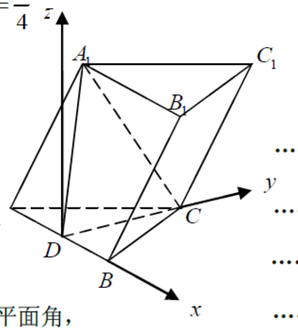
$\therefore \angle A_1DC=60^0$ ……2′

$AB\perp$ 面A_1DC， $CH\subset$ 面$A_1DC\Rightarrow AB\perp CH$， 又 $CH\perp A_1D$，

$\therefore CH\perp$ 面ABB_1A_1 ……3′

$\therefore \angle CAH$为AC与平面ABB_1A_1所成角的平面角

$CH=DC\cdot\sin\angle A_1DC=\frac{3}{2}, AC=2\Rightarrow \sin\angle CAH=\frac{CH}{AC}=\frac{3}{4}$ ……2′



$\because A_1C_1//AC$，

$\therefore A_1C_1$ 与与平面ABB_1A_1所成角的正弦值为$\frac{3}{4}$ ……1′

法二：建立如图以为坐标原点的空间直角坐标系，则： ……1′

$D(0,0,0)$，$A(-1,0,0)$, $B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$ ……2′

由 $AB\perp$ 面A_1DC 可得 $\angle A_1DC$ 为二面角 A_1-AB-C 的平面角， ……1′

$\therefore \angle A_1DC=60^0\Rightarrow A_1(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$ ……1′

设面 ABB_1A_1 的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\overrightarrow{DA_1}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(0,\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})\cdot(x,y,z)=0\\ (1,0,0)\cdot(x,y,z)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}y+3z=0\\ x=0\end{cases}$ ……1′

$\therefore \vec{n}=(0,\sqrt{3},-1), \overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3},0)$ ……1′

又$\because A_1C_1//AC$

$\therefore \sin\theta=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{(1,\sqrt{3},0)\cdot(0,\sqrt{3},-1)}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$ ……2′

20. 解（1） $\lambda=1$，$a_{n+1}-a_n=n+1$, ……1′

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ……2′

$b_n=\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$， ……2′

$\therefore S_n=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=\frac{2n}{n+1}$ ……2′

（2）法一： $\lambda=2, a_{n+1}=2a_n+n+1\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{n+1}{2^{n+1}}$ ……2′

$\therefore \dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\cdots\dfrac{2}{2^2}$ ……1′

$\therefore \dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{n-1}{2^{n-1}}+\cdots\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{1}{2}\Rightarrow a_n=2^n(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots+\dfrac{n}{2^n})$ ……2′

$\therefore n\geq 2$时，$a_n\geq 2^n$，$b_n\leq\dfrac{1}{2^n}$ ……1′

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\leq 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{3}{2}$ ……2′

法二：$\lambda=2, a_{n+1}=2a_n+n+1\Rightarrow a_{n+1}+\mathrm{n}+3=2(a_n+n+2)\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}+n+3}{a_n+n+2}=2$ ……3′

$\therefore$数列$\{a_n+n+2\}$是以4为首项，2为公比的等比数列$\Rightarrow a_n=2^{n+1}-n-2$ ……1′

$b_n=\dfrac{1}{2^{n+1}-n-2}=\dfrac{1}{2^n+(2^n-n-2)}$，$\because n\geq 2$时$,2^n\geq n+2\Rightarrow b_n\leq\dfrac{1}{2^n}$ ……2′

$\therefore S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\leq 1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{3}{2}$ ……2′

21. 解：（1）$\begin{cases}e^2=1-\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{3}{4}\\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{1}{4b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=4\\ b^2=1\end{cases}$, ……2′

$\therefore$椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ ……1′

(2) ①设$P(x_0,y_0)$，过点P直线方程设为$y-y_0=k(x-x_0)$

由$\begin{cases}y=kx-(kx_0-y_0)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(\dfrac{1}{4}+k^2)x^2-2k(kx_0-y_0)x+(kx_0-y_0)^2-1=0$ ……2′

相切$\Rightarrow\Delta=4k^2(kx_0-y_0)^2-(1+4k^2)[(kx_0-y_0)^2-1]=0$ ……1′

化简得：$(4-x_0{}^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0{}^2=1$ ……1′

$\therefore k_1k_2=\dfrac{1-y_0{}^2}{4-x_0{}^2}=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow x_0{}^2+4y_0{}^2=8$, ……1′

$\therefore P$点轨迹方程为$x^2+4y^2=8(x\neq\pm 2)$. ……1′

②设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则$PA:\dfrac{x_1x}{4}+y_1y=1$，$PB:\dfrac{x_2x}{4}+y_2y=1$ ……1′

因为PA,PB过点$P(x_0,y_0)$，$\therefore\begin{cases}x_2x_0+4y_1y_0=4\\ x_2x_0+4y_2y_0=4\end{cases}\therefore AB$方程为$x_0x+4y_0y=4$ ……1′

由$\begin{cases}x_0x+y_0y=1\\ x^2+4y^2=1\end{cases}\Rightarrow x^2-x_0x+2-2y_0{}^2=0$，$\Delta=x_0{}^2-8+8y_0{}^2=4y_0{}^2$

$\therefore|AB|=\dfrac{\sqrt{x_0{}^2+16y_0{}^2}}{2},d=\dfrac{|x_0{}^2+4y_0{}^2-4|}{\sqrt{x_0{}^2+16y_0{}^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{x_0{}^2+16y_0{}^2}}$ ……3′

$\therefore S=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=1$，$\therefore \Delta PAB$ 的面积为定值. ……1′

22.（1）$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x},(x>0)$ ……1′

若 $a\le 0$，则 $f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ……1′

若 $a>0$，则当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增. ……1′

（2）$g'(x)=x-a\ln x-1=f(x)$，且 $g'(1)=f(1)=0$

由（1）得：（i）$a\le 0$，$\therefore$ f(x)在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore x\in(0,1)$ 时 $g'(x)=f(x)<f(1)=0$，$g(x)$ 递减，

$x\in(1,+\infty)$ 时 $g'(x)=f(x)>f(1)=0$ $g(x)$ 递增，$g(1)$ 为 $g(x)$ 的极小值，满足条件。 ……1′

（ii）$a>0$，f(x)在(0，a)上单调递减，在(a，+∞)上单调递增

$\therefore 0<a<1$ 时，$x\in(a,1)$，$g'(x)=f(x)<f(1)=0$，$g(x)$ 递减，$x\in(1,+\infty)$ 时

$g'(x)=f(x)>f(1)=0$，$g(x)$ 递增，$g(1)$ 为 $g(x)$ 的极小值，满足条件。

$\therefore a\ge 1$ 时，$x\in(0,1)$ 时，$g'(x)=f(x)>f(1)=0$，$g(x)$ 递增，不满足条件； ……2′

综上：$a<1$ ……1′

(2) $g'(x_1)=x_1-a\ln x_1-1=0\Rightarrow a=\frac{x_1-1}{\ln x_1}$ ……1′

$\therefore g(x_1)=\frac{1}{2}x_1^{\ 2}-ax_1\ln x_1+(a-1)x_1=-\frac{1}{2}x_1^{\ 2}+\frac{x_1^{\ 2}-x_1}{\ln x_1}$ ……1′

设 $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{x^2-x}{\ln x}$

$h'(x)=\frac{-x(\ln x)^2+(2x-1)\ln x-x+1}{(\ln x)^2}$，设 $m(x)=-x(\ln x)^2+(2x-1)\ln x-(x-1)$ ……1′

$m'(x)=-(\ln x)^2-\frac{1}{x}+1, m'(\sqrt{e})=-\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{e}}+1>0, m'(e)=-1-\frac{1}{e}+1<0$， ……1′

又 $\because m''(x)=-\frac{2\ln x}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-2x\ln x}{x^2}=0$ 只有一个实根，

$\therefore$ 存在唯一一个 $x_0\in\left(\sqrt{e},e\right)$，使得 $m'(x_0)=0$

$\therefore x\in(1,x_0)$ 时，$m'(x)>0\Rightarrow m(x)$ 递增，$\therefore x\in(x_0,+\infty)$ 时，$m'(x)<0\Rightarrow m(x)$ 递减. ……1′

又 $m(1)=0, m(e)=0, \therefore x\in(1,e)$ 时，$m(x)>0\Rightarrow h'(x)>0, h(x)$ 单调递增， ……1′

$x\in(e,+\infty)$ 时，$m(x)<0\Rightarrow h'(x)<0, h(x)$ 单调递减， ……1′

$\therefore h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{2}e^2-e$，即 $g(x_1)$ 的最大值为 $\frac{1}{2}e^2-e$ ……1′