2020 学年第二学期浙江省精诚联盟适应性联考

高三数学参考答案

1.

【答案】B

【解析】$A=\{x \mid x>1\}$，$x^2-2x\le 0$,则$B=\{x \mid 0\le x\le 2\}$

$\therefore A\cap B=\{x \mid 1<x\le 2\}=(1,2]$，故选：B.

2.

【答案】A

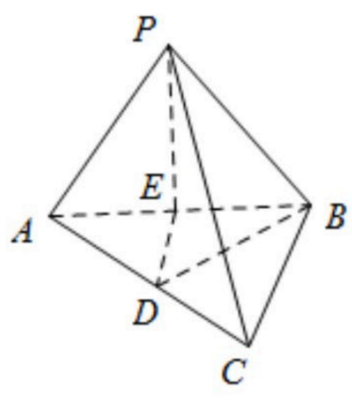
【解析】复数 z 的实部为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$|z|=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{2}}{2})^2+(-b)^2}=1$，$b=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以复数 z 的虚部为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

3.

【答案】A

【解析】

根据三视图可得该三棱锥的直观图如下：



取AB、AC的中点为E、D

则有$PE\perp$平面ABC，$\angle ABC=90^\circ$，$BC=2$，$AB=2\sqrt{3}$，$PE=3$，所以$DE=1$，$AC=4$，$DC=2$，PC=4

设内切球的半径为R，$\dfrac{1}{3}S_{表}\cdot R=V_{P-ABC}$可得 R=$\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$

故选：A

4.

【答案】A

【解析】由题意可知，射影形成的图形为半径为$\sqrt{3}$的圆，所以面积为3π

5.

【答案】B

【解析】

$\because \dfrac{1}{5}=\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$

$\therefore \dfrac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{1}{5}$，化为：$3\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$，解得$\tan\alpha=2$或$-\dfrac{1}{3}$

$\sin\alpha=2\cos\alpha$或$\sin\alpha=-\dfrac{1}{3}\cos\alpha$，故选：B.

6.

【答案】C

【解析】甲乙必须在丁的同侧，故种数为$C_4^1\times A_2^2\times 2=16$，又必须隔空而坐，故采用插空法，$C_5^4=5$，

故最终总数为$16\times 5=80$，答案为C

7.

【答案】B

【解析】由$p(X=1)=\dfrac{1}{5}$，故$\dfrac{n}{n+4}=\dfrac{1}{5}$，$\therefore n=1$

由条件可知X可能取值为$1,2,3,4,5$

则 $p(X=1)=\dfrac{1}{5}$，$p(X=2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}$，$p(X=3)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{5}$

$p(X=4)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$，

$p(X=5)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{1}{5}+3\times\dfrac{1}{5}+4\times\dfrac{1}{5}+5\times\dfrac{1}{5}=3$

8.

【答案】B

【解析】由题意可知，线段MF_2中点恰好在y轴上，，则直线$MN\perp x$轴，故$MF_1=\dfrac{b^2}{a}$，

$\because \cos\angle MF_2F_1=\dfrac{1}{3}\therefore \sin\angle MF_2F_1=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\therefore \tan\angle MF_2F_1=2\sqrt{2}$

$\therefore \tan\angle MF_2F_1 = \frac{MF_1}{F_1F_2} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2c} = \frac{b^2}{2ac} = 2\sqrt{2} \therefore b^2 = 4\sqrt{2}ac$，

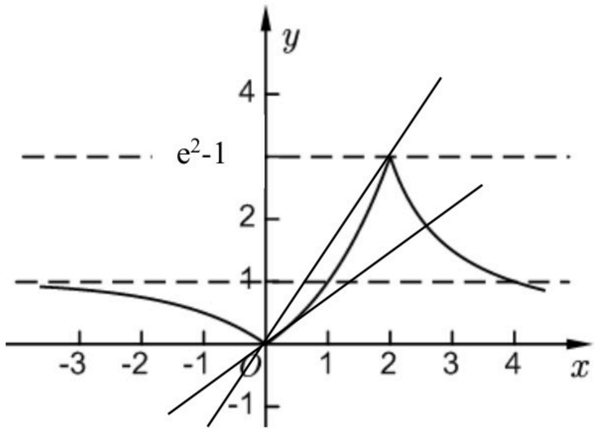
$\therefore c^2 - a^2 = 4\sqrt{2}ac \therefore e^2 - 4\sqrt{2}e - 1 = 0 \therefore e = 2\sqrt{2} + 3$

9.

【答案】B

【解析】

已知 $f(x) = \begin{cases} |e^x - 1|, x < 2 \\ \dfrac{e^2 - 1}{x - 1}, x \geq 2 \end{cases}$，作出函数图像，



通过函数图像可以看出，当直线 $y = kx$ 与 $f(x) = e^x - 1$ 相切时，$k = 1$，直线 $y = kx$ 过点 $(2, e^2 - 1)$ 时

$k = \frac{e^2 - 1}{2}$，所以 $f(x) = kx$ 有且仅有 3 个不等实根，可以得到. $1 < k < \frac{e^2 - 1}{2}$

故选：B.

10.

【解析】

对于选项 A，$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n{}^2 + a_n + 2\ln(a_n - 1) \therefore a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}a_n{}^2 + 2\ln(a_n - 1) > 0$，故 A 错误；

对于选项 B，$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n{}^2 + a_n + 2\ln(a_n - 1) \geq \frac{1}{2}a_n{}^2$，故 B 错误；

对于选项 C, D

设函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln(x - 1)$，所以 $y' = x + 1 + \frac{2}{x - 1} = \frac{x^2 + 1}{x - 1} > 0$，所以函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 2\ln(x - 1)$

为单调递增函数，数列 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n{}^2+a_n+2\ln(a_n-1)$ 为单调递增数列，故 $4\le a_{n+1}\le\frac{1}{2}e^2+2e+\frac{7}{2}$，故答案为C

11.【答案】 $y=\pm\frac{x}{2},\frac{\sqrt{5}}{2}$

【解析】由已知，得 $a=2,b=1,c=\sqrt{5}$，所以双曲线渐近线方程为 $y=\pm\frac{x}{2}$，离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

12.【答案】-1　32

【解析】常数项为 $T_5=(-1)^5=-1$，所有项的二项式系数为 $C_5^0+C_5^1+\cdots+C_5^5=2^5=32$

13.【答案】5　$\frac{7}{4}$

【解析】画出 $\begin{cases}x-y+1\le 0\\x+2y-8\le 0\\x\ge 1\end{cases}$ 可行域，如图中阴影神墙部分△ABC(包含边界)所示，

由图可得，当直线过点A时，直线1的斜率最大，由 $\begin{cases}x-y+1\le 0\\x+2y-8\le 0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，即 $A(2,3)$，$z_{min}=2+3=5$；

目标函数 $\frac{x+y+4}{x+3}=1+\frac{y+1}{x+3}$，其中 $\frac{y+1}{x+3}$ 可以看成是可行域内的点 (x,y) 和点 $(-3,-1)$ 确定的直线1的斜率，当直线过点 $B(1,2)$ 时，直线1的斜率最大，此时直线1的斜率为 $\frac{2+1}{1+3}=\frac{3}{4}$，故 $\frac{x+y+4}{x+3}$ 的最大值为 $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$.

故答案为：5，　$\frac{7}{4}$

14.【答案】 $\frac{1}{7}$

【解析】数列 $\{\frac{2S_n-n}{n}\}$ 是以1为首项，1为公差的等差数列，所以 $\frac{2S_n-n}{n}=n$，$\therefore S_n=\frac{n(n+1)}{2}$，

$\therefore a_n=n$，所以 $S_{n+4}=\frac{(n+4)(1+n+4)}{2}=\frac{(n+4)(n+5)}{2}$，

则 $\frac{a_1+a_n}{S_{n+4}}=\frac{1+n}{\frac{(n+4)(n+5)}{2}}=\frac{2}{(n+1)+\frac{12}{n+1}+7}\le\frac{2}{4+\frac{12}{4}+7}=\frac{1}{7}$，

当且仅当 $n=2$或3时，等号成立，所以 $\frac{a_1+a_n}{S_{n+4}}$ 的最大值是 $\frac{1}{7}$.

故答案为: －.

15.

【答案】$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$，$2\sqrt{6}-3$

【解析】

令$\angle BDC=\alpha$，因为$AD=CD=\frac{5}{3}$，所以$cos\alpha=cos2A=1-2sin^2\alpha=\frac{1}{3}$, ,

所以$\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

$sinB=sin(\alpha+60^0)=\sin\alpha\cdot\cos60^\circ+\cos\alpha\cdot\sin60^\circ=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$，

在ΔBCD中，由正弦定理得$\frac{BD}{\sin60^0}=\frac{CD}{\sin B}$，解得$BD=\frac{CD}{sinB}\cdot sin60^0=2\sqrt{6}-3$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$，　$2\sqrt{6}-3$

16.

【答案】$4+4\sqrt{2}$

【解析】因为　$x>0,y>0,x+2y=xy$，$\therefore\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}=1$，

所　以　$x+2y+\dfrac{x}{y}=(x+2y)\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{2}{x}\right)+\dfrac{x}{y}=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{4y}{x}+4\ge2\sqrt{8}+4=4\sqrt{2}+4$　，　当

$\begin{cases}\dfrac{2x}{y}=\dfrac{4y}{x}\\x+2y=xy\end{cases}$，即$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\y=1+\sqrt{2}\end{cases}$时取等号，$\dfrac{xy+x+2y^2}{y}$的最小值为$4\sqrt{2}+4$　.

故答案为：$4\sqrt{2}+4$.

17.【答案】8

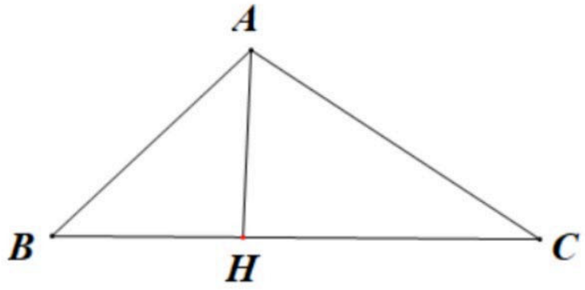
【解析】因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\sin B+\overrightarrow{AC}\cdot\sin C=\overrightarrow{AH}$，$B,H,C$三点共线，

所以 $\sin B+\sin C=1$

又$\sin B=\frac{2}{c},\sin C=\frac{2}{b}$，所以$\frac{2}{c}+\frac{2}{b}=1$

所以$|AB|+|AC|=b+c=(b+c)\cdot\left(\frac{2}{c}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{b}\geq$

$4+2\sqrt{\frac{2b}{c}\cdot\frac{2c}{b}}=8$



当且仅当$b=c$时取到最小值 8.

故答案为：8.

18.

【解析】解：（1）函数

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos^4x-\sin x\cos x-\frac{1}{2}\sin^4x=\frac{1}{2}(\cos^4x-\sin^4x)-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2}(\cos^2x-\sin^2x)(\cos^2x+\sin^2x)-\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{1}{2}(\cos^2x-\sin^2x)-\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 2x-\sin 2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x+\frac{\pi}{4})$$ ……………………………………………………3 分

所以最小正周期为$T=\pi$， ……………………………………………………5 分

单调减区间为$[k\pi-\frac{\pi}{8},k\pi+\frac{3\pi}{8}],k\in Z$ ……………………………………………………7 分

(2) $\because f(\frac{A}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(A+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2},\therefore\cos(A+\frac{\pi}{4})=-1,\therefore A=\frac{3\pi}{4}$， ……………………9 分

$\because\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}\therefore b^2+c^2+2bc\cos\frac{3\pi}{4}=4\times 2$

$\therefore b^2+c^2-\sqrt{2}bc=8$

$\therefore b^2+c^2-8=\sqrt{2}bc\leq\sqrt{2}\frac{b^2+c^2}{2}$ ……………………………………………………11 分

$\therefore(1-\frac{\sqrt{2}}{2})(b^2+c^2)\leq 8\therefore b^2+c^2\leq\frac{16}{2-\sqrt{2}}=8(2+\sqrt{2})$，当且仅当$b=c$时，取等号。……14 分

19.

【解析】

(I) 由题意可知，$\angle PAB=\frac{\pi}{2}$，故$PA\perp AC$， ……………………3 分

$\because PB\perp AC$，$\therefore AC\perp$面PAB，……………………5 分

$\therefore AC\perp AB$，$\therefore \Delta ABC$ 为等腰直角三角形，

$\therefore BC=\sqrt{2}$ ……………………7 分

（II）取 BC 中点 F，连接 PF, AF，

由 ΔPAC 是以 ΔPAB 以 PA 为轴旋转而成，故 $PB=PC, AB=AC$，……………………9 分

$\therefore AF\perp BC, PF\perp BC$，所以 $BC\perp$面 PAF，

过 A 作 $AG\perp PF$ 交 PF 于 G，

$\because BC\perp$面 PAF，$\therefore BC\perp AG$，$\therefore BC\perp$面 PBC，……………………11 分

$\therefore \angle APG=\angle APF$ 即为 PA 与面 PBC 所成角，……………………12 分

而 $PA\perp AB, PA\perp AC, \therefore PA\perp$面$ABC, \therefore PA\perp AF$，

$\because BC=\sqrt{2}, AC=AB=1 \therefore AF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, PA=2, \therefore PF=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \therefore \sin\angle APF=\dfrac{AF}{PF}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{1}{3}$. ……15 分

20.

【答案】(1) $a_n=n$；(2) $b_n=2^{n+1}$

【解析】(1) 由已知，神墙得$(a_n+a_{n+1})(na_{n+1}-(n+1)a_n)=0$，

因为数列$\{a_n\}$是正项数列，所以$na_{n+1}-(n+1)a_n=0$， ……………………2 分

即$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}$, 累乘得，$a_n=n\,(n\geq 2)$，又 $a_1=1$ 也满足上式

故$\{a_n\}$的通项 $a_n=n$. ……………………5 分

由已知，得$b_{n+1}=2b_n$，又 $b_1=4$，

所以$\{b_n\}$是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $b_n=2^{n+1}$. ……………………7 分

（2）设$x_n=c_{2n-1}+c_{2n}=\frac{-(2n-1)^2\cdot 2^{2n}}{2}+\frac{(2n)^2\cdot 2^{2n+1}}{4}=2(4n-1)\cdot 4^{n-1}$……………………9 分

则$\{c_n\}$的前 $2n$项和T_{2n}即为数列$\{x_n\}$的前 n 项和，设为 P_n，

则 $P_n=2(3\times4^0+7\times4^1+11\times4^2+\cdots+(4n-1)\cdot4^{n-1})$

$\therefore 4P_n=2(3\times4^1+7\times4^2+11\times4^3+\cdots+(4n-5)\cdot4^{n-1}+(4n-1)\cdot4^n)$…………………11 分

两式相减得：

$$-3P_n=2(3\times4^0+4\times4^1+4\times4^2+\cdots+4\cdot4^{n-1}-(4n-1)\cdot4^n)$$
$$=2\left(3+4\times\frac{4(1-4^{\mathrm{n}-1})}{1-4}-(4n-1)\cdot4^n\right)$$

$\therefore T_{2n}= \quad =\frac{14+(12n-7)\cdot2^{2n+1}}{9}$ …………15 分

21.

【答案】(1) $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$，(2) $8\sqrt{2}$

【解析】

(1) 抛物线 E：$x^2=4y$，所以焦点坐标为$(0,1)$ ，故椭圆的焦点也为$(0,1)$，$\therefore c=1$ ，………2 分

由椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$，所以$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ ，所以$a=2$，$\therefore b=\sqrt{3}$， ………4 分

椭圆$C:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$. ………5 分

(2)由 (1) 可知，椭圆$C:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1$，所以上顶点的坐标为$(0,2)$， ………7 分

设$M(x_0,y_0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ ，因为抛物线 E：$x^2=4y$，所以$y'=\frac{x}{2}$，所以$k_{AM}=\frac{x_1}{2},k_{BM}=\frac{x_2}{2}$ ，

………9 分

得$l_{AM}:y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1),l_{BM}:y-y_2=\frac{x_2}{2}(x-x_2)$

$M(x_0,y_0)$同时在直线l_{AM},l_{BM}上，所以$\begin{cases}y_0-y_1=\frac{x_1}{2}(x_0-x_1)\\y_0-y_2=\frac{x_2}{2}(x_0-x_2)\end{cases}$，

所以直线 AB 的方程为：$y_0-y=\frac{x}{2}(x_0-x)$，化简可得$x_0x=2(y+y_0)$，又直线 AB 经过椭圆的上顶点，

所以$y_0=-2$，所以直线 AB 为$x_0x=2(y-2)$ ………11 分

联立方程：$\begin{cases}x_0x=2(y-2)\\x^2=4y\end{cases}$ ，可得$x_0x=2(\frac{x^2}{4}-2),\therefore x^2-2x_0x-8=0$，

所以$|AB|=\sqrt{1+\frac{x_0^{\ 2}}{4}}\times\sqrt{4x_0^{\ 2}+32}$ ，M 到直线 AB 的距离$d=\frac{|x_0^{\ 2}+8|}{\sqrt{x_0^{\ 2}+4}}$， ………13 分

$\therefore S=\frac{1}{2}\times\sqrt{1+\frac{x_0^{\ 2}}{4}}\times\sqrt{4x_0^{\ 2}+32}\times\frac{|x_0^{\ 2}+8|}{\sqrt{x_0^{\ 2}+4}}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{x_0^{\ 2}+8})^3\geq 8\sqrt{2}$

故面积的最小值为$8\sqrt{2}$. ………15 分

22.

【答案】(1) 答案见解析；(2) $(-\infty,2e-4]$.

【解析】

(1) $f(x)$的定义域是R， $f'(x)=2e^{2x}-(a+2)$. ……… 1 分

①当$a+2\leq 0$，即$a\leq -2$时，$f'(x)>0$在R上恒成立，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；…… 3 分

②当$a+2>0$，即$a>-2$时，令$f'(x)<0$，得$x<\frac{1}{2}\ln\frac{a+2}{2}$；

令$f'(x)>0$，得$x>\frac{1}{2}\ln\frac{a+2}{2}$；则$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\ln\frac{a+2}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{a+2}{2},+\infty\right)$上单调递增. …… 5 分

(2) 对一切$x\in(0,+\infty)$， $f(x)\geq g(x)$，即

$e^{2x}-\ln x-(a+2)x\geq \ln 2e$在$(0,+\infty)$上恒成立，

设$\varphi(x)=e^{2x}-\ln x-(a+2)x$，则$\varphi'(x)=2e^{2x}-\frac{1}{x}-(a+2)$， …… 7 分

易知$\varphi'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，且当$x\to 0^+$时，$\varphi'(x)\to -\infty$，当$x\to +\infty$时，$\varphi'(x)\to +\infty$，所以存在唯一零点，

令$\varphi'(x_0)=2e^{2x_0}-\frac{1}{x_0}-(a+2)=0$，则$2e^{2x_0}-\frac{1}{x_0}=a+2\left(x_0>0\right)$，

且$\varphi(x)$在$\left(0,x_0\right)$上单调递减，在$\left(x_0,+\infty\right)$上单调递增， …… 9 分

$\therefore \varphi(x)_{\min}=\varphi\left(x_0\right)=e^{2x_0}-\ln x_0-(a+2)x_0=\left(1-2x_0\right)e^{2x_0}-\ln x_0+1\geq \ln 2e$，

即有$\left(2x_0-1\right)e^{2x_0}+\ln 2x_0\le 0$，…… 11 分

设$t=2x_0>0$，令$h(t)=(t-1)e^t+\ln t\le 0$，$h'(t)=te^t+\dfrac{1}{t}>0$，则$h(t)$单调递增，又$h(1)=0$，

故$0<t=2x_0\le 1$，得$0<x_0\le\dfrac{1}{2}$， …… 13 分

$\therefore$增函数$y=2e^{2x}-\dfrac{1}{x}\left(0<x\le\dfrac{1}{2}\right)$，其值域为$(-\infty,2e-2]$，即$a+2$的取值范围为$(-\infty,2e-2]$，

故a的取值范围是$(-\infty,2e-4]$. …… 15 分