

绝密★ 考试结束前

浙江省 Z20 联盟（名校新高考研究联盟）2021 届高三第三次联考

数学试题卷

命题：平阳中学

审题：鲁迅中学

海宁高级中学

考生须知：

1. 本卷满分 150 分，考试时间 120 分钟；
2. 答题前务必将自己的姓名，准考证号用黑色字迹的签字笔或钢笔分别填写在试题卷和答题纸规定的地方。
3. 答题时，请按照答题纸上“注意事项”的要求，在答题纸相应的位置上规范答题，在本试卷纸上答题一律无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

参考公式：

如果事件 A, B 互斥那么

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

如果事件 A, B 相互独立,那么

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

如果事件 A 在一次试验中发生的概率为 p ,那么 n

次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (k=0,1,2,\dots,n)$$

台体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$$

其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积,

h 表示为台体的高

柱体的体积公式

$$V = Sh$$

其中 S 表示柱体的底面积, h 表示柱体的高

锥体的体积公式

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

其中 S 表示锥体的底面积, h 表示锥体的高

球的表面积公式

$$S = 4\pi R^2$$

球的体积公式

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

其中 R 表示球的半径

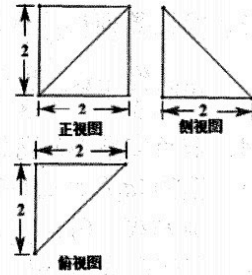
选择题部分

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

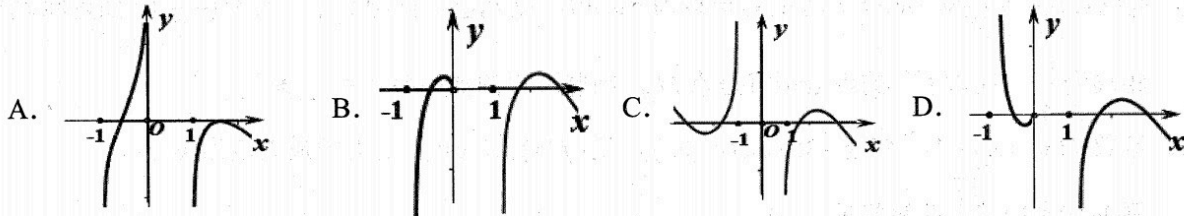
1. 已知 i 是虚数单位, $z = \frac{3-i}{1+i}$, 则 z 的虚部为
 A. $2i$ B. $-2i$ C. 2 D. -2
2. 已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq -1\}$, $B = \{y | y = -2x + a, x \in A\}$, 若 $A \subseteq B$, 则实数 a 的取值范围是
 A. $[-5, -4]$ B. $[4, 5]$ C. $[-3, -6]$ D. $[3, 6]$
3. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+2 \geq 0 \\ x+y-3 \geq 0 \\ y \geq 1 \end{cases}$, 则 $z = x+2y$ 的最小值为
 A. 4 B. 1 C. $\frac{11}{2}$ D. -1

4. 已知一个几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积是

- A. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ B. $8\sqrt{2}$
 C. $\frac{8}{3}$ D. 8



5. 函数 $f(x) = \sin x \cdot \ln\left(x - \frac{1}{x}\right)$ 的部分图像可能是



6. “点 (a, b) 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 外” 是 “直线 $ax + by + 2 = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相交” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 已知奇函数 $y = f(x)$ 对任意的 $x \in R$ 都满足 $f(x) + f(x + \pi) = 0$ ，且 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递增，

若 $a = \sin(-3) \cdot f(-3)$ ， $b = \sin(e^{\ln\sqrt{2}}) \cdot f(e^{\ln\sqrt{2}})$ ， $c = \sin(2^{0.6}) \cdot f(2^{0.6})$ ，则下列结论正确的是

- A. $a > c > b$ B. $c > b > a$
 C. $b > a > c$ D. $b > c > a$

8. 用 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成无重复数字的六位偶数，若有且仅有 2 个奇数相邻，则这样的六位数共有

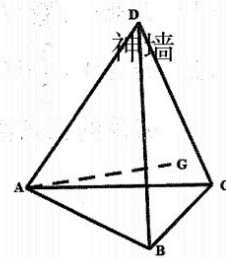
- A. 192 个 B. 216 个
 C. 276 个 D. 324 个

9. 已知 A, B, C, D 是以 O 为球心，半径为 2 的球面上的四点， $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ，则 $|AD| + |BD| + |CD|$ 不可能等于

- A. 6 B. 7 C. 8 D. $6\sqrt{2}$

10. 在三棱锥 $D-ABC$ 中， $AD = 2AB = 2AC = 2BC$ ，点 A 在面 BCD 上的投影 G 是 $\triangle BCD$ 的垂心，二面角 $G-AB-C$ 的平面角记为 α ，二面角 $G-BC-A$ 的平面角记为 β ，二面角 $G-CD-A$ 的平面角记为 γ ，则

- A. $\alpha > \beta > \gamma$
 B. $\alpha > \gamma > \beta$
 C. $\beta > \gamma > \alpha$
 D. $\gamma > \beta > \alpha$



非选择题部分

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. $(x-1)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_6x^6$ ，则 $a_3 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ ； $a_1 + a_2 + \dots + a_6 = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$

12. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C + \sin A \sin B$ ，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$ ， $a + b = 5$ ，则角 $C = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$ ；边长 $c = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} + a_n = 9 \cdot 2^{n-1} (n \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_1 =$ ▲ ;

$$\log_2 \frac{a_1}{3} + \log_2 \frac{a_4}{3} + \log_2 \frac{a_7}{3} + \dots + \log_2 \frac{a_{100}}{3} =$$
 ▲

14. 非负实数 x, y 满足 $2xy + x + 6y - 6 = 0$, 则 $x + 2y$ 的最小值为 ▲

15. 已知 $\{a, b, c\} \subseteq \{-3, -2, -1, 0, 1\}$, 记随机变量 $X = |a+b| + |b+c| + |c+a|$, 则 $P(X=6) =$ ▲ ; $E(X) =$ ▲

16. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(c, 0)$, 点 P, Q 在椭圆 C 上, 点 $M(-\frac{c}{2}, 0)$ 到直线 FP 的距离为 $\frac{c}{2}$, 且 $\triangle PQF$ 的内心恰好是点 M , 则椭圆 C 的离心率 $e =$ ▲

17. 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3tx - 3t + 3, t \in (0, 1)$, 记 $|f(x)|$ 在 $x \in [0, 2]$ 上的最大值为 $M(t)$, 则 $M(t) \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集是 ▲

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

18. 函数 $f(x) = 3\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2})$.

(1) 求函数 $y = f(x)$ 的对称中心;

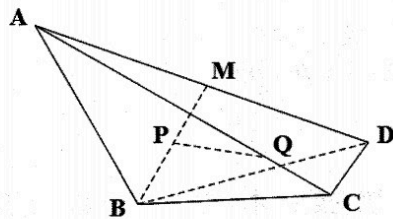
(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图象, 其中 $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ 且 $\tan \varphi = \frac{3}{4}$,

求函数 $g(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的取值范围.

19. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $\triangle BCD$ 是等边三角形, M 为 AD 中点, P 为 BM 中点, $\overline{AQ} = 3\overline{QC}$.

(1) 求证: $PQ \parallel$ 面 BCD ;

(2) 若 $AD = \frac{3}{2}CD, BC \perp AD$, 二面角 $A-BC-D$ 的平面角为 120° , 求直线 BM 与平面 ABC 所成角的正弦值.



20. 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1 = 1$, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 记 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 的前 n 项和为 G_n , $\left\{\frac{b_{n+1}}{b_n}\right\}$ 的前 n 项积为 T_n , 且 $G_n = 2T_n - 2$.

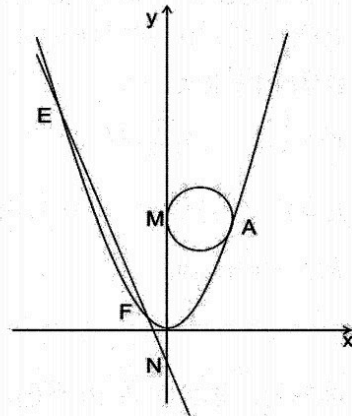
(1) 若 $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $S_n = a_n$, 对任意自然数 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $\frac{b_1}{a_1 a_2} + \frac{b_2}{a_2 a_3} + \dots + \frac{b_n}{a_n a_{n+1}} > \lambda \cdot \frac{(-1)^n}{a_{n+1}}$, 求实数 λ 的取值范围.

21. 如图, 已知抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$, 点 $A(x_0, y_0) (y_0 \geq 1)$ 为抛物线上一点, 过点 A 的圆 G 与 y 轴相切于点 $M(0, t)$, 且与抛物线 C 在点 A 处有相同切线. $\overline{OM} = 8\overline{NO}$, 过点 N 的直线 l 交抛物线于点 E, F , 直线 AE, AF 的斜率分别为 k_1, k_2 , 满足 $k_1 + k_2 = 0$.

(1) 求抛物线 C 的焦点坐标和准线方程;

(2) 求点 A 到直线 l 的距离的最小值.



22. 函数 $f(x) = \ln x - ax^2 + 1$.

(1) 若 $a = 1$, 求函数 $y = f(2x - 1)$ 在 $x = 1$ 处的切线;

(2) 若函数 $y = f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$,

(i) 求参数 a 的取值范围;

(ii) 证明: $x_2^2 - x_1 < \frac{-a^2 + a + 1}{a^2}$.