2021年镇海中学高考数学模拟试题

2021年5月17日

注意事项：

1．本科目考试分试题卷和答题卷，考生必须在答题卷上作答．答题前，请在答题卷的密封线内填写学校、班级、学号、姓名；

2．本试卷分第Ⅰ卷选择题和第Ⅱ卷非选择题两部分．满分150分，考试时间120分钟．

参考公式：

如果事件 A, B 互斥，那么	柱体的体积公式
$P(A+B)=P(A)+P(B)$	$V=Sh$
如果事件 A, B 相互独立，那么	其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高
$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$	锥体的体积公式
如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，那么 n	$V=\frac{1}{3}Sh$
次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率	其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高
$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\dots,n)$	球的表面积公式
台体的体积公式	$S=4\pi R^2$
$V=\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)$	球的体积公式
其中 S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积,	$V=\frac{4}{3}\pi R^3$
h 表示台体的高	其中 R 表示球的半径

第Ⅰ卷（选择题，共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{x\mid -1<x<3\}$，**则** $A\cap B=$（　　）

A． $\{1,2,3\}$　**B．** $\{x\mid 1<x<3\}$　**C．** $\{1,2\}$　**D．** $\{x\mid 1\le x\le 2\}$

2．已知抛物线 $x^2=2py(p>0)$ **上一点** $M(m,1)$ **到焦点的距离为** $\frac{3}{2}$，**则其焦点坐标为**（　　）

A． $(0,\frac{1}{2})$　**B．** $(\frac{1}{2},0)$　**C．** $(\frac{1}{4},0)$　**D．** $(0,\frac{1}{4})$

3．设 l **为直线，** α，β **是两个不同的平面，下列命题中正确的是**

A． 若 $\alpha\perp\beta$，$l//\alpha$，则 $l\perp\beta$　**B．** 若 $l//\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha//\beta$

C． 若 $l\perp\alpha$，$l//\beta$，则 $\alpha//\beta$　**D．** 若 $l\perp\alpha$，$l\perp\beta$，则 $\alpha//\beta$

4．若实数 x, y **满足约束条件** $\begin{cases} x+y-1\le 0 \\ x-2y+2\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$，**则** $2x-y$ **的最大值是**（　　）

A． -4　**B．** -1　**C．** 0　**D．** 2

5. 已知奇函数 $f(x)=\cos(\omega x+\alpha\pi)(\omega>0,0<\alpha<1)$ 的最小正周期为 8π，则 $\log_{\omega}\alpha$ 的值是　（　　　）

A．2　　　B．-2　　　C．$\frac{1}{2}$　　　D．$-\frac{1}{2}$

6. 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1-a_5+\frac{S_6}{6}=0$，则 $\frac{a_4}{S_5}=$（　　）

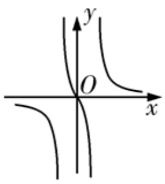
A．-3　　　B．$\frac{9}{35}$　　　C．$\frac{11}{45}$　　　D．$\frac{11}{9}$

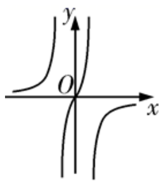
7. 在△ABC 中，“$\sin A=\cos B$”是“$C=\frac{\pi}{2}$”的（　　）

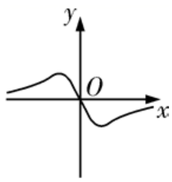
A．充分不必要条件　　　B．必要神墙不充分条件

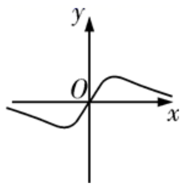
C．充要条件　　　D．既不充分也不必要条件

8. 函数 $f(x)=\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{x^2-\cos x}$ 的图象大致为(　　)

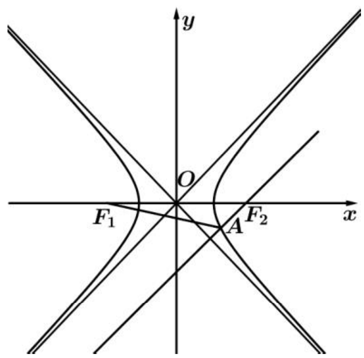
A. 

B. 

C. 

D. 

9. 如图，已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>a>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过右焦点作平行于一条渐近线的直线交双曲线于点 A，若 $\triangle AF_1F_2$ 的内切圆半径为 $\frac{b}{4}$，则双曲线的离心率为（　　）



A．$\frac{5}{3}$　　　B．$\frac{5}{4}$　　　C．$\frac{4}{3}$　　　D．$\frac{3}{2}$

10. 若实数 a,b 满足 $\ln(2a)-\ln b\geq a^2+\frac{1}{b^2}-1$，则 $a+b=$（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

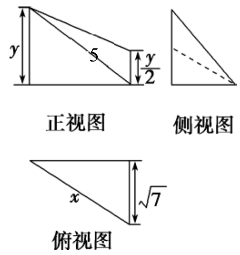
第Ⅱ卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每小题 6 分，单空题每小题 4 分，共 36 分．

11. 已知复数 z 满足：$z(3+4i)=i$，则 $\bar{z}=$__________， $z\cdot\bar{z}=$__________.

12．若二项式 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{m}{x^2}\right)^n (m,n\in R)$ 展开式的二项式系数之和为 32，常数项为 10，则 $m+n=$________;二项式系数最大的项的系数是________.

13．某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积得最大值为________，此时 $x=$________.



14．用 0,1,2,3,4,5 组成无重复数字的四位数，则其中 0 和 5 不相邻的四位数有________个(用数字作答)；设这些无重复数字的四位数的各数字积为 ξ，则 $E(\xi)=$________.

15．棱长为 6 的正方体内有一个棱长为 x 的正四面体，且该四面体可以在正方体内任意转动，则 x 的最大值为____________ .

16．已知平面向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=3,\ |\vec{c}|=2$，且 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}+4$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|$ 的取值范围是__________ .

17．若实数 x,y 满足 $x^3+8y^3+6xy-1=0$，则 x^3y 的最大值为______________ .

三、解答题：**本大题共 5 小题，共 74 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．**

18．（本题满分 14 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos^2 x-m$，

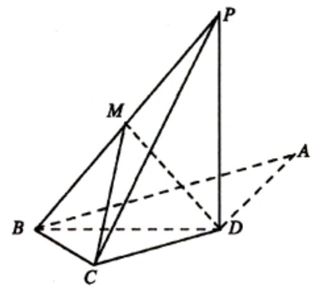
（1）求函数 $f(x)$ 的最小正周期与单调递增区间；

（2）若 $x\in\left[\dfrac{5\pi}{24},\dfrac{3\pi}{4}\right]$时，函数 $f(x)$ 的最大值为 0，求实数 m 的值．

19．（本题满分 15 分）如图，在四边形 $ABCD$ 中，$BC=CD, BC\perp CD, AD\perp BD$，以 BD 为折痕把 $\triangle ABD$ 折起，使点 A 到达点 P 的位置，且 $PC\perp BC$．

（1）证明：$PD\perp$ 平面 BCD；

（2）若 M 为 PB 的中点，二面角 $P-BC-D$ 等于 60°，求直线 PC 与平面 MCD 所成角的正弦值．



20．（本题满分 15 分）已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}=a_n^2-na_n+n+1$，$n\in \mathrm{N}^*$．

（1）求$\left\{a_n\right\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\sqrt{2a_n-1}$，求使不等式$\left(1+\dfrac{1}{b_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)\geq p\sqrt{2n+1}$对一切$n\geq 2$且$n\in \mathrm{N}^*$均成立的最大整数$p$．

21．（本题满分 15 分）已知抛物线 C：$y^2=2px$的准线为$x=-\dfrac{1}{2}$，

（1）求抛物线 C 的神墙方程；

（2）已知点$M\left(-\dfrac{p}{2},0\right)$，点$N\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，点$A$为抛物线 C 上一点，直线$AM$交抛物线 C 于另一点$B$，且点$A$在线段$MB$上，直线$AN$交抛物线 C 于另一点$D$，求$\Delta MBD$的内切圆半径$r$的取值范围.

22．（本题满分 15 分）已知函数$f(x)=x^3+3ax+1$，$x\in[-1,1],a\in R$

（1） 若函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上不单调，求a的取值范围；

（2） 求$|f(x)|$的最大值；

（3） 若$|f(x)+b|\leq 1$对任意$x\in[-1,1]$恒成立，求$a+b$的取值范围.

答案：

CADDC　BBAAC

11. $\dfrac{4-3i}{25}$　1/25

12. 7　40 或 80

13. $\dfrac{25\sqrt{7}}{8}$　$\dfrac{\sqrt{78}}{2}$

14. 240　548/25　（48　137/5）均对

15. $2\sqrt{6}$

16. $[\sqrt{14}-2,\sqrt{14}+2]$

17. 27/512

18.（1）$T=\pi$，单调递增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right]$，$k\in Z$；（2）$m=\dfrac{1}{2}$.

【解析】(1）化简 $f(x)$，求出 $f(x)$ 在最小正周期，解不等式，求出函数的递增区间即可；

（2）根据 x 的范围，求出 $2x-\dfrac{\pi}{6}$ 的范围，得到关于 m 的方程，解出即可.

试题解析：(1)

$$f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos^2 x-m=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1+\cos 2x}{2}-m=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-m-\frac{1}{2}$$

则函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，　……5 分

根据 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z$，得 $-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\dfrac{\pi}{3}+k\pi,k\in Z$，

所以函数的单调递增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{6}+k\pi,\dfrac{\pi}{3}+k\pi\right]$，$k\in Z$.　……7 分

(2)因为 $x\in\left[\dfrac{5}{24}\pi,\dfrac{3}{4}\pi\right]$，所以 $2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{4}{3}\pi\right]$，　……9 分

则当 $2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，$x=\dfrac{\pi}{3}$ 时，函数取得最大值 0，　……11 分

即 $1-m-\dfrac{1}{2}=0$，解得：$m=\dfrac{1}{2}$.　……14 分

19.【详解】

（1）证明：因为 $BC \perp CD, BC \perp PC, PC \cap CD = C$，

所以 $BC \perp$ 平面 PCD，

又因为 $PD \subset$ 平面 PCD，所以 $BC \perp PD$.

又因为 $PD \perp BD, BD \cap BC = B$，

所以 $PD \perp$ 平面 BCD.

（2）因为 $PC \perp BC, CD \perp BC$，

所以 $\angle PCD$ 是二面角 $P-BC-D$ 的平面角，即 $\angle PCD = 60^\circ$，

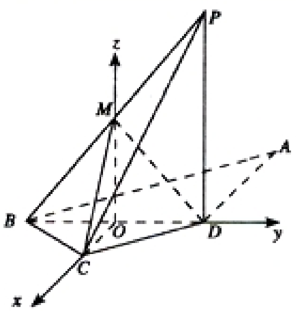
在 $Rt\triangle PCD$ 中，$PD = CD\tan 60^\circ = \sqrt{3}CD$，

取 BD 的中点 O，连接 OM, OC，因为 $BC = CD, BC \perp CD$,

所以 $OC \perp BD$,由（1）知，$PD \perp$ 平面 BCD，OM 为 $\triangle PBD$ 的中位线,

所以 $OM \perp BD, OM \perp OC$，即 OM, OC, BD 两两垂直，

以 O 为原点建立如图所示的坐标系 $O-xyz$，设 $OB = 1$，则



$$P(0,1,\sqrt{6}), C(1,0,0), D(0,1,0), M\left(0,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right), \overrightarrow{CP} = (-1,1,\sqrt{6}), \overrightarrow{CD} = (-1,1,0),$$

$\overrightarrow{CM} = \left(-1,0,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，设平面 MCD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD} = 0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CM} = 0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+\dfrac{\sqrt{6}}{2}z = 0,\end{cases}$ 令 $z = \sqrt{2}$，得 $\vec{n} = (\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{2})$，

所以 $\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{CP}\rangle = \dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{CP}||\vec{n}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

所以直线 PC 与平面 MCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

20.【详解】

（1）猜想 $a_n=n$，再数学归纳法证明

（2）由题意得 $p\le\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$对　　，　　恒成立，

记 $F(n)=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$,

则 $\frac{F(n+1)}{F(n)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)\left(1+\frac{1}{b_{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)}$

$=\frac{2n+2}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}=\sqrt{\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+8n+3}}>1$

$\because F(n)>0$，$\therefore F(n+1)>F(n)$，即 $F(n)$ 是随 n 的增大而增大，

$F(n)$ 的最小值为 $F(2)=\frac{2(1+\frac{1}{\sqrt{3}})}{\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{15}}\in(1,2)$，　$p\in Z$，所以 $p_{\max}=1$.

21.　已知抛物线 C：　　　　的准线为　　—，

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）已知点　　—　　，点　　—　　，点　为抛物线 C 上一点，直线　　交抛物线 C 于另一点　，且点　在线段　　上，直线　　交抛物线 C 于另一点　，求　　　的内切圆半径　的取值范围.

解：（1）$y^2=2x$

（2）设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$D(x_3,y_3)$，直线BD与x轴交点为E，内切圆与AB的切点为T.

设直线AM的方程为：$y=k(x+\frac{1}{2})$，则联立方程$\begin{cases}y=k(x+\frac{1}{2})\\ y^2=2x\end{cases}$，得：$k^2x^2+(k^2-2)x+\frac{k^2}{4}=0$

$\therefore x_1x_2=\frac{1}{4}$且$0<x_1<x_2$　$\therefore x_1<\frac{1}{2}<x_2$　$\therefore$直线AN的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1-\frac{1}{2}}(x-\frac{1}{2})$,

与方程$y^2=2x$联立得：$y_1{}^2x^2-(y_1{}^2+2x_1{}^2-2x_1+\frac{1}{2})x+\frac{1}{4}y_1{}^2=0$，化简得：$2x_1x^2-(2x_1{}^2+\frac{1}{2})x+\frac{1}{2}x_1=0$

解得：$x=\frac{1}{4x_1}$或$x=x_1$　$\because x_3=\frac{1}{4x_1}=x_2$　$\therefore BD\perp x$轴

设ΔMBD的内切圆圆心为H，则H在x轴上且$HT\perp AB$

方法（一）$\therefore S_{\Delta MBD}=\frac{1}{2}\cdot(x_2+\frac{1}{2})\cdot 2|y_2|$，且$\Delta MBD$的周长为：$2\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}+2|y_2|$

$\therefore S_{\Delta MBD}=\frac{1}{2}[2\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}+2|y_2|]\cdot r=\frac{1}{2}\cdot(x_2+\frac{1}{2})\cdot|2y_2|$

$\therefore r=\frac{(x_2+\frac{1}{2})|y_2|}{|y_2|+\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}}=\frac{1}{\frac{1}{x_2+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{y_2{}^2}+\frac{1}{(x_2+\frac{1}{2})^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2x_2}+\frac{1}{(x_2+\frac{1}{2})^2}}+\frac{1}{x_2+\frac{1}{2}}}$.

方法（二）设$H(x_2-r,0)$，直线BD的方程为：$x=x_2$，其中$y_2{}^2=2x_2$

直线AM的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2+\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})$，即$y_2x-(x_2+\frac{1}{2})y+\frac{1}{2}y_2=0$，且点$H$与点$O$在直线$AB$的同侧，

$\therefore r=\frac{|(x_2-r)y_2+\frac{1}{2}y_2|}{\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}}=\frac{(x_2-r)y_2+\frac{1}{2}y_2}{\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}}$，解得：$r=\frac{x_2y_2+\frac{1}{2}y_2}{y_2+\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2x_2}+\frac{1}{(x_2+\frac{1}{2})^2}}+\frac{1}{x_2+\frac{1}{2}}}$

方法（三）$\because \Delta MTH\sim\Delta MEB$ $\therefore\frac{MH}{MB}=\frac{HT}{BE}$，即$\frac{x_2+\frac{1}{2}-r}{\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}}=\frac{r}{|y_2|}$，解得：

$r=\frac{(x_2+\frac{1}{2})|y_2|}{|y_2|+\sqrt{(x_2+\frac{1}{2})^2+y_2{}^2}}=\frac{x_2+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{(x_2+\frac{1}{2})^2}{y_2{}^2}+1}+1}=\frac{x_2+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{(x_2+\frac{1}{2})^2}{2x_2}+1}+1}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2x_2}+\frac{1}{(x_2+\frac{1}{2})^2}}+\frac{1}{x_2+\frac{1}{2}}}$

令$t=x_2+\frac{1}{2}$，则$t>1$

$\therefore r=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2t-1}+\frac{1}{t^2}}+\frac{1}{t}}$在$(1,+\infty)$上单调增，则$r>\frac{1}{\sqrt{2}+1}$，即$r$的取值范围为$(\sqrt{2}-1,+\infty)$.

22.（1）$f'(x)=3x^2+3a$，且$f'(x)=0$在$(-1,1)$上有解，则$\begin{cases}3+3a>0\\3a<0\end{cases}\Leftrightarrow -1<a<0$

（2）若$a\le -1$时，$f(x)$递减，$f(-1)=-3a>0,f(1)=2+3a,$ 则$|f(x)|_{\max}=-3a$

若$a\ge 0$，则$f(x)$递增，$f(-1)=-3a,f(1)=2+3a,$则$|f(x)|_{\max}=2+3a$

（4）　若$-1<a<0$，则$f(x)$在$(-1,-\sqrt{-a})$递增，$(-\sqrt{-a},\sqrt{-a})$递减，$(\sqrt{-a},1)$递增；

$f(-1)=-3a>0,f(-\sqrt{-a})=-2a\sqrt{-a}+1,f(\sqrt{-a})=2a\sqrt{-a}+1f(1)=2+3a.$

又因为 $f(x)$ 关于 $(0,1)$ 对称，则 $|f(x)|_{\max}=\max\{-2a\sqrt{-a}+1,2+3a\}$

而 $(-2a\sqrt{-a}+1)-(2+3a)=(2\sqrt{-a}-1)(\sqrt{-a}+1)^2$

若 $-1<a\le-\dfrac{1}{4}$，则 $|f(x)|_{\max}=-2a\sqrt{-a}+1$

若 $-\dfrac{1}{4}<a<0$ 则 $|f(x)|_{\max}=2+3a$

综上 $|f(x)|_{\max}=\begin{cases}-3a & a\le-1\\ -2a\sqrt{-a}+1 & -1<a\le\dfrac{1}{4}\\ 2+3a & a\ge\dfrac{1}{4}\end{cases}$.

(3) 先考虑必要性，若 对任意 恒成立，首先必须满足

$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\le2$，由（2）知 $-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\le a\le0$；

若 $-\dfrac{1}{4}\le a\le0$，则 $\begin{cases}f(x)_{\max}+b\le1\\ f(x)_{\min}+b\ge-1\end{cases}$

则 $\begin{cases}b+2+3a\le1\\ -3a+b\ge-1\end{cases}\Rightarrow-1+4a\le a+b\le-1-2a$ ，所以 $a+b\in[-2,-\dfrac{1}{2}]$

若 $-\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\le a\le-\dfrac{1}{4}$，则 $\begin{cases}-2a\sqrt{-a}+1+b\le1\\ 2a\sqrt{-a}+1+b\ge-1\end{cases}$

则 $-2-2a\sqrt{-a}+a\le a+b\le a+2a\sqrt{-a}$

令 $t=\sqrt{-a}\in[\dfrac{1}{2},\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}]$，则 $-2+2t^3-t^2\le a+b\le-t^2-2t^3$

因为 $-2+2t^3-t^2$ 在 $[\dfrac{1}{2},\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}]$ 递增， $-t^2-2t^3$ 递减，则

$a+b\in[-2,-\dfrac{1}{2}]$；

综上：$a+b\in[-2,-\dfrac{1}{2}]$