Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2024 届高三第三次联考

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	**C**	**D**	**B**	**A**	**C**	**D**	**B**	**B**

8．设 $|PF_1|=m,|PF_2|=n,$ 由双曲线的定义知 $|m-n|=2a$ ①，在 ΔF_1PF_2 中，由余弦定理得 $4c^2=m^2+n^2-2mn\cdot\cos\angle F_1PF_2$，$\therefore 4c^2=m^2+n^2-\frac{6}{7}mn$ ②，又 $\because 2\left(m^2+n^2\right)=(3a)^2+(2c)^2$，$\therefore m^2+n^2=\frac{9a^2+4c^2}{2}$ ③，由①③得 $mn=\frac{1}{4}a^2+c^2$ ④，把③④代入②得 $4c^2=\frac{9a^2+4c^2}{2}-\frac{6}{7}(\frac{1}{4}a^2+c^2)$，化简得 $20c^2=30a^2,\therefore 20a^2+20b^2=30a^2\ \therefore a=\sqrt{2}b,\therefore$ 渐近线方程为 $x\pm\sqrt{2}y=0$．

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11
答案	BC	ACD	ABD

11．A 选项当 $\lambda+\mu=1$ 时，点 P 在线段 D_1B 上，且 $D_1B//EF$，$V_{D-PEF}=V_{B-DEF}$ 为定值，A 正确．

B 选项当 $\lambda=\mu=\frac{1}{2}$ 时，点 P 为线段 D_1B 的中点，易求正四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的半径为 $\frac{3}{4}$，则表面积是 $\frac{9}{4}\pi$，B 正确．

C 选项点 P 在矩形 D_1B_1BD 及其内部，取线段 A_1D_1 的中点 F_1，由对称性知，$|PF|=|PF_1|$，$\therefore |PF|+|PE|=|PF_1|+|PE|\ge|F_1E|=\frac{\sqrt{5}}{2}\ \therefore |PF|+|PE|+|FE|\ge\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$，C 错误．

D 选项 $AP=\frac{\sqrt{6}}{2}$，又点 P 在矩形 D_1B_1BD 及其内部，$\therefore$ 点 P 的轨迹为点 A 为球心，半径长为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 的球面被平面 D_1B_1BD 截且在矩形 D_1B_1BD 及其内部的图形，为圆（部分），$r=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$，该圆是以 BD 的中点为圆心，半径为 1 的圆的一部分（即 $\frac{1}{4}$ 圆周），则轨迹长为 $\frac{\pi}{2}$，D 正确．

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．

12．3； 13．180； 14．$\left[\dfrac{1}{2\mathrm{e}},\dfrac{1}{2}\right]$

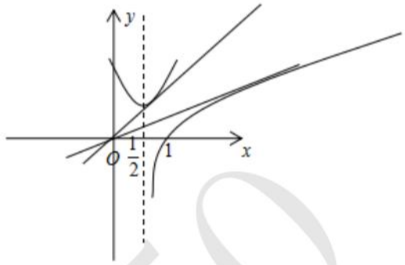
14．不等式可化为$(2ax-\ln x)\left(2ax-\left(x^2-x+1\right)\right)\le 0$，

即$\ln x\le 2ax\le x^2-x+1$，数形结合得，$k_1\le 2a\le k_2$

其中k_1为过原点且与$y=\ln x$相切的直线，k_2为过原点

且与$y=x^2-x+1$相切的直线，易得$k_1=\dfrac{1}{\mathrm{e}},k_2=1$．

故$\dfrac{1}{\mathrm{e}}\le 2a\le 1$，$\dfrac{1}{2\mathrm{e}}\le a\le\dfrac{1}{2}$．



四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤．

15．（13 分）解：

（1）由题意$a_{2n}=2a_n+1\Rightarrow a_2=2a_1+1\Rightarrow d=a_1+1$①……………………………………………2 分

$a_2^2=a_1\cdot a_5\Rightarrow(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)\Rightarrow d=2a_1$②……………………………………………2 分

由①②可得$a_1=1,d=2$……………………………………………………………………2 分

所以$a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$……………………………………………………………1 分

（2）$a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}=\dfrac{(a_1+a_{2n-1})\cdot n}{2}=n\cdot a_n=2n^2-n$……………………………6 分

16．（15 分）解：

（1）取BD的中点M，连AM，CM，

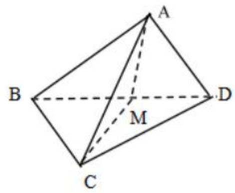
由$AB=AD=BC=BD$，可得$BD\perp AM$，$BD\perp CM$，……………………………2 分

又因为$AM\cap CM=M$，AM、$CM\subseteq$平面ACM，

所以$BD\perp$平面ACM，…………………………………………………………………2 分

因为$AC\subseteq$平面ACM，

所以$AC\perp BD$……………………………………………………2 分



（2）方法 1：

因为$BD=2\sqrt{3}$，所以$AM=CM=1$，

又$AC=\sqrt{3}$，所以$\angle AMC=120^\circ$，

由（1）可得$BD\perp$平面ACM，所以平面$BCD\perp$平面ACM，

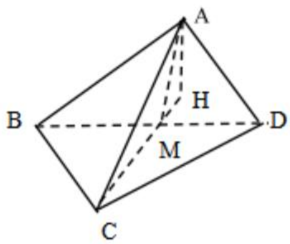
作$AH\perp CM$交CM延长线于点H，则$AH\perp$平面BCD且$AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，…………………3 分

设点B到平面ACD的距离为h，

$V_{B-ACD}=V_{A-BCD}$……………………………………………………………………………2 分

$\dfrac{1}{3}S_{\Delta ACD}\cdot h=\dfrac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$h=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$…………………………………………2 分

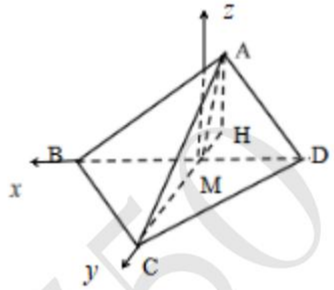


设直线AB与平面ACD所成角为θ

$\sin\theta=\frac{h}{AB}=\frac{\sqrt{39}}{13}$

所以直线 AB 与平面 ACD 取成线面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$ ……………………………………2 分

方法 2：



因为 $BD=2\sqrt{3}$，所以 $AM=CM=1$，又 $AC=\sqrt{3}$，

所以 $\angle AMC=120^{\circ}$，

由（1）可得 $BD\perp 平面ACM$

所以 $平面BCD\perp 平面ACM$，

作 $AH\perp CM$ 交 CM 延长线于点 H，

则 $AH\perp 平面BCD且AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

如图，以 MB 为 x 轴，MC 为 y 轴，$z轴//AH$ 建立空间直角坐标系

$A(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，$D(-\sqrt{3},0,0)$ ……………………………………………3 分

$\overrightarrow{AC}=(0,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{DC}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

设面 ACD 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DC}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3y=\sqrt{3}z\\ \sqrt{3}x+y=0\end{cases}\Rightarrow 令x=1,则y=-\sqrt{3},\ z=-3$$

所以 $\vec{n}=(1,-\sqrt{3},-3)$ …………………………………………………………………………4 分

设直线 AB 与平面 ACD 所成角为 θ

$$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AB},\vec{n}>|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}\cdot 2}=\frac{\sqrt{39}}{13}$$

所以直线 AB 与平面 ACD 取成线面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$ ……………………………………2 分

17.（15 分）解：

（1）依题意，$P_1=1$，$P_2=1\times0.4=0.4$，$P_3=0.4\times0.4+0.6\times0.6=0.52$ ………………3 分

依题意 $P_n=0.4P_{n-1}+0.6(1-P_{n-1})=-\frac{1}{5}P_{n-1}+\frac{3}{5}$， ……………………………………………2 分

整理得 $P_n-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}(P_{n-1}-\frac{1}{2})$，

所以 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是以 $P_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ 为首项，$-\frac{1}{5}$ 为公比的等比数列，…………………………2 分

即 $P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{5})^{n-1}$，$P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{5})^{n-1}$ ………………………………………………1 分

（3）$X=200,300$ ………………………………………………………………………1 分

$P(X=300)=0.8P_n+0.2(1-P_n)=0.6P_n+0.2$，……………………3 分

则他第 n 天通过运动锻炼消耗的能量 X 的期望为 $300P(X=300)+200(1-P(X=300))$

$=200+100P(X=300)=220+60P_n=250+30(-\frac{1}{5})^{n-1}$. ………………3 分

18．（17 分）解：

（1）由题意 $c=\sqrt{3}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得：$a=2$，$b=1$，所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

……………………………………………………4 分

（2）折叠前设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases} y=x+m \\ x^2+4y^2=4 \end{cases} \Rightarrow 5x^2+8mx+4(m^2-1)=0$

直线 $y=kx+m$ 与椭圆交于不同两点，所以 $\Delta>0$，解得 $m^2<5$，从而 $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{8m}{5} \\ x_1\cdot x_2=\frac{4(m^2-1)}{5} \end{cases}$

因为 AB 位于 x 轴两侧，则 $m^2<4$，从而 $-2<m<2$ ……………………………………4 分

以 O 为坐标原点，折叠后，分别以原 y 轴负半轴，原 x 轴，原 y 轴正半轴所在直线为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，则折叠后 $A'(0,x_1,y_1)$，$B'(-y_2,x_2,0)$ …………………1 分

①折叠后 $OA'\perp OB'$，则 $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OB'}=0$，即 $x_1\cdot x_2=0$，所以 $m^2=1$，$m=\pm1$…………2 分

②折叠前 $|AB|=\sqrt{2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}$ ……………………2 分

折叠后

$|AB|=\sqrt{y_2^2+(x_2-x_1)^2+y_1^2}=\sqrt{\frac{4-x_2^2}{4}+\frac{4-x_1^2}{4}+(x_2-x_1)^2}=\sqrt{2+\frac{3}{4}(x_1+x_2)^2-\frac{7}{2}x_1x_2}$

$=\frac{\sqrt{120-22m^2}}{5}$ ………………………………………………………………2 分

所以 $\frac{\sqrt{120-22m^2}}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{5}\sqrt{5-m^2}$，解得 $m^2=\frac{15}{2}$，此时直线 l 与椭圆无交点

故不存在 m，使折叠后的 AB 与折叠前的 AB 长度之比为 $\frac{3}{4}$……………………2 分

19．（17 分）解：

（1）函数 $y=\sqrt{3}x$ 不是"$\frac{\pi}{6}$旋转函数"，理由如下：

$y=\sqrt{3}x$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{6}$ 后与 y 轴重合，

当 $x=0$ 时，有无数个 y 与之对应，与函数的概念矛盾，

因此函数 $y=\sqrt{3}x$ 不是"$\frac{\pi}{6}$旋转函数". ………………………………3 分

（2）由题意可得函数 $f(x)=\ln(2x+1)(x>0)$ 与函数 $y=kx+b$ 最多有 1 个交点，

且 $k=\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

即 $\ln(2x+1)=kx+b(x>0)$ 最多有一个根，

$\Rightarrow \ln(2x+1)-kx=b(x>0)$

即函数 $y=\ln(2x+1)-kx(x>0)$ 与函数 $y=b(b\in R)$ 最多有 1 个交点，

即函数 $y=\ln(2x+1)-kx$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调， ……………………………………2 分

$y'=\dfrac{2}{2x+1}-k$.

因为$x>0$， $\dfrac{2}{2x+1}\in(0,2)$，所以$y'=\dfrac{2}{2x+1}-k\le 0$， $k\ge\dfrac{2}{2x+1}$，所以$k\ge 2$，………2 分

即$\tan(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)\ge 2$， $\tan\alpha\le\dfrac{1}{2}$，即$\tan\alpha$的最大值为$\dfrac{1}{2}$. ………………………………2 分

（3）由题意可得函数$g(x)=m(x-1)e^x-x\ln x-\dfrac{x^2}{2}$与函数$y=x+b$最多有 1 个交点，

即$m(x-1)e^x-x\ln x-\dfrac{x^2}{2}=x+b\Rightarrow m(x-1)e^x-x\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x=b$，

即函数$y=m(x-1)e^x-x\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x$与函数$y=b$最多有 1 个交点，

即函数$y=m(x-1)e^x-x\ln x-\dfrac{x^2}{2}-x$在$(0,+\infty)$上单调，

$y'=mxe^x-\ln x-x-2$，当$x\to 0$时， $y'\to+\infty$，

所以$y'\ge 0\Rightarrow m\ge(\dfrac{\ln x+x+2}{xe^x})_{\max}$， …………………………………4 分

令$\varphi(x)=\dfrac{\ln x+x+2}{xe^x}$，则$\varphi'(x)=\dfrac{(x+1)(-\ln x-x-1)}{x^2e^x}$，

因为$t=-\ln x-x-1$在$(0,+\infty)$上单调减，且$t(\dfrac{1}{4})>0$， $t(1)<0$，

所以存在$x_0\in(\dfrac{1}{4},1)$，使$t(x_0)=0$，即$\ln x_0+x_0=-1\Rightarrow\ln(x_0\cdot e^{x_0})=-1\Rightarrow x_0\cdot e^{x_0}=\dfrac{1}{e}$，

所以$\varphi(x)$在$(0,x_0)\nearrow$，$(x_0,+\infty)\searrow$，

所以$\varphi_{\max}(x)=\varphi(x_0)=\dfrac{\ln x_0+x_0+2}{x_0e^{x_0}}=\dfrac{1}{x_0e^{x_0}}=e$，

即$m\ge e$. ……………………………………4 分