

绝密★考试结束前

Z20 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2024 届高三第三次联考

数学试题卷

命题：海宁高级中学

磨题：余姚中学

玉环中学

龙湾中学

注意事项：

- 答卷前，务必将自己的姓名，考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
- 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 集合 $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$, $B = \{x | x - 1 \geq 8 - 2x\}$, 则 $A \cup B =$
A. $[2, 4)$ B. $[3, 4)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$
- 复数 $\frac{5i}{i-2}$ 的虚部是
A. i B. 1 C. $-2i$ D. -2
- 已知单位向量 a, b 满足 $a \cdot b = 0$, 则 $\cos \langle 3a + 4b, a + b \rangle =$
A. 0 B. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. 1
- 设 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $S_3 = a_4 - 2, S_2 = a_3 - 2$, 则公比 $q =$
A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
- 已知 $A(-2, -2)$, $B(1, 3)$, 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上运动, 则 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的最大值为
A. $16 - 6\sqrt{2}$ B. $26 + 2\sqrt{2}$ C. $26 + 4\sqrt{2}$ D. 32
- 若函数 $f(x) = \sin(\omega x) + \cos x$ 的最大值为 2, 则常数 ω 的取值可以为
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
- 已知 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 若 $x = t$ 为函数 $f(x) = \frac{x-1}{e^x-1} (x < 0)$ 的极值点, 则 $f([t]) =$
A. $\frac{2e}{e-1}$ B. $\frac{3e^2}{e^2-1}$ C. $\frac{4e^3}{e^3-1}$ D. $\frac{5e^4}{e^4-1}$

8. 设 O 为原点, F_1, F_2 为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两个焦点, 点 P 在 C 上且满足 $|OP| = \frac{3}{2}a$,

$\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{3}{7}$, 则该双曲线的渐近线方程为

- A. $\sqrt{2}x \pm y = 0$ B. $x \pm \sqrt{2}y = 0$ C. $\sqrt{3}x \pm y = 0$ D. $x \pm \sqrt{3}y = 0$

二、**选择题**: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分. 浙考神墙750

9. 下列说法正确的是

- A. 数据 7,5,3,10,2 的第 40 百分位数是 3
 B. 已知随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, σ 越小, 表示随机变量 X 分布越集中
 C. 已知一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差为 3, 则 $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, \dots, x_n - 1$ 的方差为 3
 D. 根据一组样本数据的散点图判断出两个变量线性相关, 由最小二乘法求得其回归直线方程为 $\hat{y} = 0.3x - m$, 若其中一个散点为 $(m, -0.28)$, 则 $m = 4$

10. 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \sin^2 \frac{A+C}{2} = b \cdot \sin A$, 下列结论正确的是

- A. $B = \frac{\pi}{3}$
 B. 若 $a = 4, b = 5$, 则 $\triangle ABC$ 有两解
 C. 当 $a - c = \frac{\sqrt{3}}{3}b$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形
 D. 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $\cos A + \cos C$ 的取值范围是 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

11. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 已知 E, F 分别为线段 B_1C, D_1C_1 的中点, 点 P 满足 $\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DD_1} + \mu \overrightarrow{DB}, \lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1]$, 则

- A. 当 $\lambda + \mu = 1$ 时, 三棱锥 $D - PEF$ 的体积为定值
 B. 当 $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, 四棱锥 $P - ABCD$ 的外接球的表面积是 $\frac{9}{4}\pi$
 C. $\triangle PEF$ 周长的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$
 D. 若 $AP = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则点 P 的轨迹长为 $\frac{\pi}{2}$

第 II 卷

三、**填空题**: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知圆台的上底面半径为 1, 下底面半径为 5, 侧面积为 30π , 则圆台的高为 ▲ .
 13. 甲、乙、丙 3 人站到共有 6 级的台阶上, 若每级台阶最多站 2 人且甲、乙不站同一个台阶, 同一台阶上的人不区分站的位置, 则不同的站法种数是 ▲ 种. (用数字作答)
 14. 已知关于 x 的不等式 $(\ln x - 2ax)[x^2 - (2a+1)x + 1] \leq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ▲ .

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤。

15. (13 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 不为零， a_1 、 a_2 、 a_5 成等比数列，且 $a_{2n} = 2a_n + 1$ 。

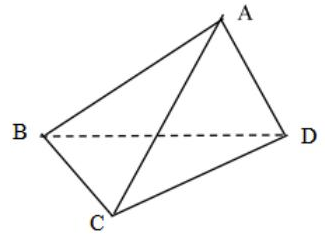
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$ 。

16. (15 分) 已知四面体 $A-BCD$ ， $AB = AD = BC = CD = 2$ ， $AC = \sqrt{3}$ 。

(1) 证明： $AC \perp BD$ ；

(2) 若 $BD = 2\sqrt{3}$ ，求直线 AB 与平面 ACD 所成角的正弦值。



17. (15 分) 为了增强身体素质，寒假期间小王每天坚持在“跑步 20 分钟”和“跳绳 20 分钟”中选择一项进行锻炼。在不下雪的时候，他跑步的概率为 80%，跳绳的概率为 20%，在下雪天，他跑步的概率为 20%，跳绳的概率为 80%。若前一天不下雪，则第二天下雪的概率为 60%，若前天下雪，则第二天仍下雪的概率为 40%。已知寒假第一天不下雪，跑步 20 分钟大约消耗能量 300 卡路里，跳绳 20 分钟大约消耗能量 200 卡路里。记寒假第 n 天不下雪的概率为 P_n 。

(1) 求 P_1 、 P_2 、 P_3 的值，并求 P_n ；

(2) 设小王寒假第 n 天通过运动消耗的能量为 X ，求 X 的数学期望。

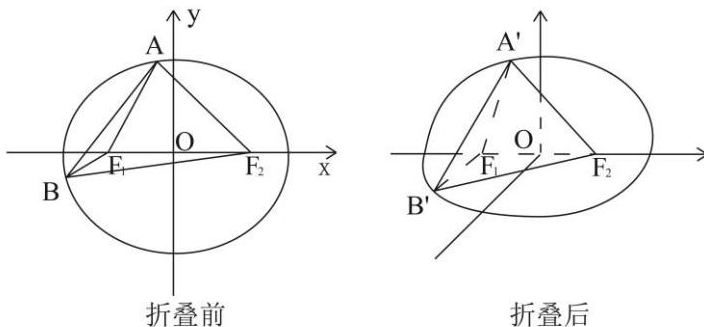
18. (17分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 焦距为 $2\sqrt{3}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 直线 $l: y = x + m$ 与椭圆交于 A, B 两点 (其中点 A 在 x 轴上方, 点 B 在 x 轴下方).

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 如图, 将平面 xOy 沿 x 轴折叠, 使 y 轴正半轴和 x 轴所确定的半平面 (平面 $A'F_1F_2$) 与 y 轴负半轴和 x 轴所确定的半平面 (平面 $B'F_1F_2$) 垂直.

①若折叠后 $OA' \perp OB'$, 求 m 的值;

②是否存在 m , 使折叠后 A', B' 两点间的距离与折叠前 A, B 两点间的距离之比为 $\frac{3}{4}$?



19. (17分) 在平面直角坐标系中, 如果将函数 $y = f(x)$ 的图象绕坐标原点逆时针旋转 $\alpha (0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$ 后, 所得曲线仍然是某个函数的图象, 则称 $f(x)$ 为“ α 旋转函数”.

(1) 判断函数 $y = \sqrt{3}x$ 是否为“ $\frac{\pi}{6}$ 旋转函数”, 并说明理由;

(2) 已知函数 $f(x) = \ln(2x+1) (x > 0)$ 是“ α 旋转函数”, 求 $\tan \alpha$ 的最大值;

(3) 若函数 $g(x) = m(x-1)e^x - x \ln x - \frac{x^2}{2}$ 是“ $\frac{\pi}{4}$ 旋转函数”, 求 m 的取值范围.