2024 学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测

数学试题答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	A	B	D	B	C	D

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。

9．BD　　10．ACD　　11．BC

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$\frac{1}{e}$　　13．$1+\sqrt{3}i$，$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$（答案不唯一）　　14．1

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分。

15．（13 分）

（1）因为 $\sin^2A-\sin^2B=\sin^2C-\sqrt{3}\sin B\sin C$，

由正弦定理得 $a^2-b^2=c^2-\sqrt{3}bc$，

所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

又因为 $2\cos B=\sin C$，即 $2\cos B=\sin(\frac{\pi}{6}+B)$，

所以 $\tan B=\sqrt{3}$.

所以 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $C=\frac{\pi}{2}$，

所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.　　…………………7 分

（2）设 $BC=a$，则 $AB=2a$，$AC=\sqrt{3}a$，$AD=\frac{2}{3}a$，

在$\triangle ADC$ 中，$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos A$，

即 $4=3a^2+\frac{4}{9}a^2-2a^2$，解得 $a^2=\frac{36}{13}$.

所以 $S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2=\frac{6\sqrt{3}}{13}$.　　…………………13 分

16．（15 分）

（1）因为△OFM 的外接圆与抛物线 C 的准线相切，

所以△OFM 外接圆的半径 $r=\frac{3p}{4}$，

所以外接圆面积 $S=\frac{9\pi p^2}{16}=\frac{9\pi}{64}$，解得 $p=\frac{1}{2}$，

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=x$，　　　　　　　　…………………7 分

（2）因为点$(-1，1)$在圆 $x^2+y^2=2$ 上，

所以点$(-1，1)$关于直线 $y=kx$ 对称的点也在圆上，

又已知$(-1，1)$关于直线 $y=kx$ 对称的点在抛物线 $y^2=x$ 上，

设点$(-1，1)$的对称点为$(x_0，y_0)$，

所以，$\begin{cases} x_0^2+y_0^2=2, \\ y_0^2=x_0 \end{cases}$，解得 $P_1(1，1)$和 $P_2(1，-1)$，

当对称点为 $P_1(1，1)$时，斜率 k 不存在，舍去；

当对称点为 $P_2(1，-1)$，得 $k=1$.　　　　　　…………………15 分

17．（15 分）

（1）由题意，知 $p_2=2p_1$，$p_3=2p_2=4p_1$，所以 $p_1=\frac{1}{7}$，$p_2=\frac{2}{7}$，$p_3=\frac{4}{7}$.

所以 $H(X)=-\left(\frac{1}{7}\ln\frac{1}{7}+\frac{2}{7}\ln\frac{2}{7}+\frac{4}{7}\ln\frac{4}{7}\right)=\ln 7-\frac{10}{7}\ln 2$. …………7 分

（2）根据参考不等式，$H(X)=-\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln p_i=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\ln\frac{1}{p_i}\leqslant\ln(\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i\cdot\frac{1}{p_i})=\ln n$.

等号成立的实际意义：

从数学角度理解，当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=\frac{1}{n}$时，$H(X)$取到最大值；

从现实生活理解，在没有任何已知信息时，对于未知信息，不加主观臆断，对每一种可能性都有所估计，且等概率地分配是最保险的做法.

…………………15 分

18.（17 分）

（1）由题意，知 $f'(x)=a(\ln x+1)-3x^2$，$x>0$.

若 $a=1$，则 $f'(x)=\ln x+1-3x^2$，

令 $g(x)=\ln x+1-3x^2$，则 $g'(x)=\frac{1-6x^2}{x}$，

所以 $f'(x)$在$(0,\frac{\sqrt{6}}{6})$单调递增，在$(\frac{\sqrt{6}}{6},+\infty)$单调递减，

所以 $f'(x)_{max}=f'(\frac{\sqrt{6}}{6})=\ln\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{1}{2}<0$，

所以 $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. ……………………5 分

（2）因为 $0\leqslant a\leqslant 3$，所以

当 $x\in(0,1]$时，$f(x)<0$ 成立；

当 $x\in(1,+\infty)$时，令 $g(x)=a(\ln x+1)-3x^2$，

所以 $g'(x)=\frac{a-6x^2}{x}<0$，

所以 $f'(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以 $f'(x)<f'(1)=a-3\leqslant 0$，

所以 $f(x)$在$(1,+\infty)$单调递减，所以 $f(x)<f(1)<0$.

综上，当 $0\leqslant a\leqslant 3$ 时，$f(x)<0$. ……………………11 分

（3）因为 $h(x)=x\ln x$，所以 $h'(x)=\ln x+1$，

令 $h'(x)<0$，则 $0<x<\frac{1}{e}$，所以 $h(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增.

因为 $h(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$，所以 $b\in(-\frac{1}{e},0)$.

不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1\in(0,\frac{1}{e})$，$x_2\in(\frac{1}{e},1)$.

先证：$x_2-x_1<b+1$，

易知 $h(x)$在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=x-1$，该切线与直线 $y=b$ 的交点的横坐标 $x_3=b+1$. 易知 $x_3>x_2-x_1$，

所以 $x_2-x_1<x_3<b+1$.

再证 $x_2-x_1>be+1$．设 $A(\frac{1}{e},\ -\frac{1}{e})$，$B(1,\ 0)$，

易知直线 OA 方程为 $y=-x$，直线 AB 方程为 $y=\frac{1}{e-1}(x-1)$，

则直线 OA，AB 与直线 $y=b$ 交点的横坐标分别为 $x_4=-b$，$x_5=(e-1)b+1$，

所以 $x_5-x_4=be+1$．

因为 $x_4=-b=-x_1\ln x_1>x_1$，同理可证 $x_4<x_2$，

所以 $x_1<x_4<x_2$．类似的可以证明 $x_1<x_5<x_2$．

所以 $x_5-x_4<x_2-x_1$，即 $be+1<x_2-x_1$，

所以 $be+1<|x_1-x_2|<b+1$．　　　　　　……………………17 分

19．（17 分）

（1）根据题意，x 的取值为 2，4，8，16．

所以 $T=\{2,\ 4,\ 8,\ 16\}$，所以 $P(T)=4$．　　　　……………………4 分

（2）**证明充分性**

若 A 是递增等比数列，所以公比 $q>1$．

则当 $j>i$ 时，$\frac{a_j}{a_i}=q^{j-i}$，

所以 $T=\{q,\ q^2,\ \cdots,\ q^{N-1}\}$，所以 $P(T)=N-1$．

证明必要性

若 A 是递增数列，则$\frac{a_2}{a_1}<\frac{a_3}{a_1}<\cdots<\frac{a_N}{a_1}$，所以$\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_3}{a_1}$，…，$\frac{a_N}{a_1}\in T$，且互不相等，

所以$T=\left\{\frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_1},\ \cdots,\ \frac{a_N}{a_1}\right\}$．

又$\frac{a_3}{a_2}<\frac{a_4}{a_2}<\cdots<\frac{a_{N-1}}{a_2}<\frac{a_N}{a_2}<\frac{a_N}{a_1}$，

所以$\frac{a_3}{a_2}$，$\frac{a_4}{a_2}$，…，$\frac{a_N}{a_2}$，$\frac{a_N}{a_1}\in T$，且互不相等．

所以$\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$，$\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_3}{a_1}$，…，$\frac{a_N}{a_2}=\frac{a_{N-1}}{a_1}$，

所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_N}{a_{N-1}}\neq 0$，所以 A 为等比数列.

若 A 是递减数列，同理可证. ……………………10 分

（3）由题意知，数列 A 由 2，4，8，…，2^n，4^n 这 $n+1$ 个数组成，

因此任意两个数作商（可相等），结果只可能为：

1，2^1，2^2，2^3，…，2^{n-1}，2^n，…，2^{2n-1}，2^{-1}，2^{-2}，…，2^{-n}，…，2^{1-2n}，

共 $2(2n-1)+1=4n-1$ 个不同的值；

因为 2，4，8，…，2^n，4^n 这 $n+1$ 个数在数列 A 中共出现 $N=2n+1$ 次，

所以数列 A 中存在 $a_i=a_j$（$i\neq j$），所以 $1\in T$.

所以 $P(T)\leqslant 4n-1$，且 $P(T)\geqslant 2n$.

设数列 A_0：2^1，2^2，…，2^n，2^{2n}，2^n，…，2^1，

此时$T=\{1，2^1，2^2，2^3，…，2^{n-1}，2^n，…，2^{2n-1}，2^{-1}，2^{-2}，…，2^{-n}，…，2^{1-2n}\}$，所以 $P(T)=4n-1$.

现对数列 A_0 分别作如下变换：

把前面的 2^n 移动到 2^{2n} 和后面的 2^n 之间，得到数列：2^1，2^2，…，2^{n-1}，2^{2n}，2^n，2^n，…，2^1.

此时$T=\{1，2^1，2^2，2^3，…，2^{n-1}，2^{n+1}，…，2^{2n-1}，2^{-1}，2^{-2}，…，2^{-n}，…，2^{1-2n}\}$，$P(T)=4n-2$.

再把前面的2^{n-1}移动到后面的2^{n-1}和 2^n 之间，得到数列：2^1，2^2，…，2^{n-2}，2^{2n}，2^n，2^n，2^{n-1}，2^{n-1}，…，2^1，

此时$T=\{1，2^1，2^2，2^3，…，2^{n-1}，2^{n+2}，…，2^{2n-1}，2^{-1}，2^{-2}，…，2^{-n}，…，2^{1-2n}\}$，$P(T)=4n-3$.

依此类推，最后把前面的 2^1 移到最后一项：得到数列 A_n：2^{2n}，2^n，2^n，2^{n-1}，2^{n-1}，…，2^1，2^1，

此时$T=\{1，2^{-1}，2^{-2}，…，2^{-n}，…，2^{1-2n}\}$，$P(T)=2n$.

综上，$P(T)$可以取到从 $2n$ 到 $4n-1$ 的所有 $2n$ 个整数值，所以 $P(T)$的取值个数为 $2n$. ……………………17 分