台州市 2025 届高三第二次教学质量评估

数　学

本试题卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。请考生按规定用笔将所有试题的答案涂、写在答题纸上。

选择题部分（共 58 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知圆 $M:(x-1)^2+(y+2)^2=4$，则圆心坐标和半径分别为

A. $(1,-2)$，4　　B. $(-1,2)$，4　　C. $(-1,2)$，2　　D. $(1,-2)$，2

2.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d>0$，$a_4=2a_2$，则 $a_1+\frac{1}{d}$ 的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3.若随机变量 $X\sim N(1,\sigma^2)$，且 $P(X<0.9)=0.3$，则 $P(|X-1|<0.1)=$

A. 0.3　　B. 0.4　　C. 0.5　　D. 0.6

4.已知复数 $z_1=1+2\mathrm{i}$，$z_2=a+4\mathrm{i}$（$a\in\mathrm{R}$，i 为虚数单位），则“$a=2$”是“$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5.已知一个盒子里有 4 个大小形状完全相同的小球，其中 2 个红球，2 个黑球，现从中任取两球，若已知一个是红球，则另一个也是红球的概率是

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

6.已知 $a\in\mathrm{R}$，若函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}-\ln x$ 既有极大值又有极小值，则 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$

7.已知某个正三棱台的上、下底面面积分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $12\sqrt{3}$，高为 6，则该正三棱台的外接球半径为

A. 4　　B. $2\sqrt{5}$　　C. 3　　D. $2\sqrt{6}$

8.已知 F_1，F_2 为双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过 F_2 作直线 l 与双曲线 Γ 的右支交于 A，B 两点，且 $|AB|=|BF_1|$，$\cos\angle ABF_1=\frac{1}{9}$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{20}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{5}{3}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

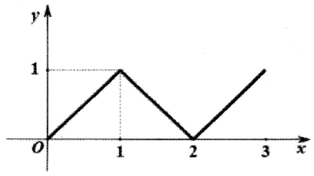
9. 已知 $f(x)$ 是定义域为 R 且周期为 2 的函数，其部分图象如图所示，则下列选项对 $\forall x \in \mathrm{R}$ 恒成立的是

A. $f(x)=f(-x)$

B. $f(1+x)=f(1-x)$

C. $f(x)\geq f(\sin x)$

D. $f(x)\leq\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$



（第 9 题）

10. 已知 $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=4$，则下列选项正确的是

A. $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ 的取值范围是 $[0,9]$

B. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$ 的最大值为 30

C. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$ 的最小值为 $-\frac{21}{2}$

D. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{c})$ 的最小值为 -10

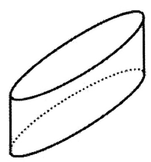
11. 如图，是由两个平行平面截半径为 2 cm 且足够高的圆柱体所得的几何体，截面与圆柱体的轴成 45°，上、下截面间的距离为 $\sqrt{2}$ cm.某高中数学兴趣小组对该几何体进行了探究，得出下列四个结论，其中正确的是

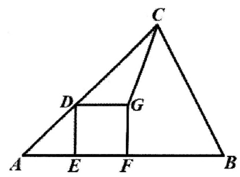
A. 截口曲线的离心率为 $\frac{1}{2}$

B. 该几何体的体积为 $8\pi\ \mathrm{cm}^3$

C. 该几何体的侧面积为 $8\pi\ \mathrm{cm}^2$

D. 该几何体的上截面面积为 $4\sqrt{2}\pi\ \mathrm{cm}^2$


（第 11 题）



（第 13 题）

非选择题部分（共 92 分）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.已知 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$，$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$__▲__.

13.如图，已知在△ ABC 中，$AB=3$，$AC=2\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{5}$，D 是线段 AC 上的动点，E，F 是线段 AB 上的动点（F 在 E 的右侧），且四边形 $DEFG$ 是正方形，则线段 CG 长度的最小值是__▲__.

14.已知集合 $S=\{x\in\mathrm{Z}\mid(x-1)[x-(4k+1)]\leq 0,k\geq 2,k\in\mathrm{Z}\}$，含两个元素的集合 $A=\{x_1,x_2\}\subseteq S$.

（1）若 $x_1+x_2\in S$，则满足条件的集合 A 的个数为__▲__；

（2）若 $\frac{2x_1+x_2}{4}\in\mathrm{Z}$，则满足条件的不同的有序数对 (x_1,x_2) 的个数为__▲__.（结果均要化简）

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）某市为了推广垃圾分类，在全市范围内开展了一系列宣传活动.为了评估宣传效果，市环保部门随机抽取了 1000 名市民进行调查.假设该市成年人口为100万，且调查结果可以代表全市成年人口的情况.调查结果如右：

了解情况	非常了解	一般了解	不了解
人数（名）	580	320	100

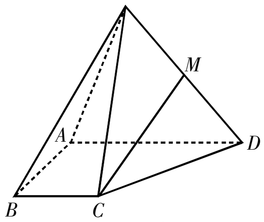
（1）从该市成年人口中随机抽取 1 人，求其对垃圾分类知识“不了解”的概率；

（2）该市环保部门计划对“不了解”垃圾分类知识的市民进行重点宣传. 假设经过重点宣传后，“不了解”的市民中有 50%转变为“一般了解”，有 20%转变为“非常了解”，其余保持不变. 经过重点宣传后，从该市成年人口中随机抽取 3 人，记 X 为其中对垃圾分类知识“非常了解”的人数，求 X 的分布列及数学期望.

16.（15 分）已知四棱锥 $P-ABCD$，底面 $ABCD$ 是直角梯形，侧面 PAD 是等边三角形， $AD \parallel BC$， $AB \perp BC$， $AD=2$， $BC=1$， $AB=\sqrt{3}$， M 是 PD 的中点.

（1）求证：直线 $CM \parallel$ 平面 PAB；

（2）当二面角 $P-AD-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 时，求直线 CM 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.



（第 16 题）

17.（15 分）已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_1(b_1+1)+a_2(b_2+1)+\cdots+a_n(b_n+1)=(2n-3)\cdot 2^{n+1}+6$， $n\in \mathrm{N}^*$，且 $a_1=b_1=1$， $b_{n+1}=2b_n+1$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

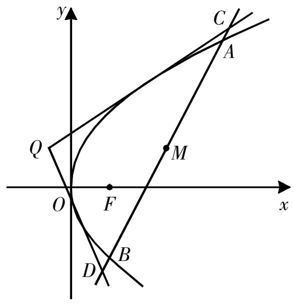
（2）求 $\left[\sum_{n=1}^{50}\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right]$ 的值.（其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，如 $[3.2]=3$）

18.（17 分）已知抛物线 $\Gamma: y^2 = 2px(p>0)$ 的焦点为 $F\left(1,0\right)$，直线 l 与抛物线 Γ 交于 A，B 两点，且 $M\left(\dfrac{5}{2},1\right)$ 为线段 AB 的中点.

（1）求抛物线 Γ 的标准方程；

（2）求直线 l 的方程；

（3）过点 $Q\left(m,1\right)(m<0)$ 作抛物线 Γ 的两条切线，分别交 l 于 C，D 两点，求△QCD 面积的最小值.



（第 18 题）

19.（17 分）函数 $f(x)$ 的定义域为 D，记 $f(x)$ 的图象在点 $(a,f(a))$ 处的切线方程为 $y=g_a(x)$.

定义集合 $P_f=\left\{a\in D \mid \forall x\neq a, \dfrac{f(x)-g_a(x)}{x-a}>0\right\}$；集合 $Q_f=\left\{a\in D \mid \forall x\neq a, \dfrac{f(x)-g_a(x)}{x-a}<0\right\}$.

（1）若 $f(x)=\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$，求 $g_{\frac{\pi}{6}}(x)$；

（2）若 $f(x)=\mathrm{e}^x$，e 为自然对数底数（下同），求证：$P_f=\varnothing$；

（3）若 $f(x)=(x^2+2x)\mathrm{e}^x$，求 $P_f\cup Q_f$，并说明理由.