

高三题库

数学学科

考生须知：

1. 本试卷共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，请在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号。
3. 所有答案必须写在答题卷上的规定区域内，写在试卷上无效。
4. 考试结束后，只需上交答题卷。

选择题部分

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题所给的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

1. 若 $z(1+i)=i^3$ ，则复数 z 在复平面内对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知全集为 \mathbf{N} ，集合 $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ， $B = \{y | y = \log_2 x, x \in A\}$ ，则 $(C_{\mathbf{N}}B) \cap A =$
 A. $\{1, 2\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{4, 8\}$ D. $\{2, 4, 8\}$
3. 已知 (a, b) 为曲线 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 上的点，则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$
4. 将函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(\frac{\pi}{6}) =$
 A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 《水浒传》、《三国演义》、《西游记》和《红楼梦》被称为中国古代四大名著. 书架的某一层上有 4 本不同的文学书，现将四大名著各一本插进这 4 本书的 5 个空隙中，要求原有书的顺序不变且四大名著中至少有 3 本相邻，则不同的插法共有
 A. 120 种 B. 240 种 C. 480 种 D. 600 种
6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ，对 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $f(x) = f(6-x)$ 与 $f(x+4) - f(x) = 2f(2)$ 均恒成立，则 $f(2026) =$
 A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1
7. 在平面直角坐标系 xOy 中， O 为坐标原点，点 $A(1, 1)$ ， $B(2, m)$ ，若直线 OA 截以 AB 为直径的圆所得的弦长为 1，则实数 $m =$
 A. $-\sqrt{2}$ B. -1 C. 1 或 -1 D. $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，则对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$ ，“ $a_{n+2} > a_{n+1} + a_n$ ”是“ $a_{n+2} > S_n + a_2$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

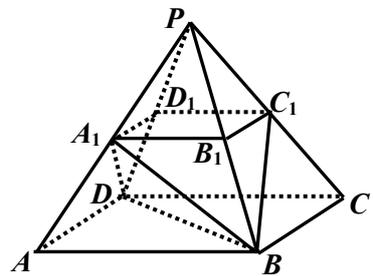
二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题所给的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分.）

9. 已知随机变量 $X \sim N(1, \sigma^2)$ ，且 $P(X > 2) = a$ ， $P(X > 4) = b$ ($0 < b < a < 0.5$)，则

- A. $P(1 \leq X \leq 4) = 1 - b$
- B. $b < P(X < -1) < a$
- C. $P(|X| \leq 2) = 1 - a - b$
- D. $P(X > 2 + m) > P(x < -m) (m > 0)$

10. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中， $AB = 4$ ， A_1, B_1, C_1, D_1 分别为侧棱 PA, PB, PC, PD 的中点，若多面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{28\sqrt{2}}{3}$ ，则

- A. $PC \parallel$ 平面 A_1BD
- B. 四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球半径为 2
- C. 直线 BC_1 与底面 $ABCD$ 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{6}$
- D. 点 B 到平面 PAD 的距离为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$



第 10 题图

11. 已知曲线 $E: x^2 + y^2 = \sin^2 x + \cos^2 y$ ， $P(x_0, y_0)$ 为曲线 E 上的动点，则下列结论正确的是

- A. 曲线 E 关于直线 $y = x$ 对称
- B. 点 P 不可能在直线 $y = x + \pi$ 上
- C. 曲线 E 与圆 $x^2 + y^2 = 1$ 有 4 个公共点
- D. 记曲线 E 所围成的区域的面积为 S ，则 $\frac{\pi}{2} < S < 2\pi$

非选择题部分

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12. 已知 $4\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 - \sin \alpha$ ，则 $\sin 2\alpha =$ _____.

13. 已知倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线 l 与曲线 $f(x) = \ln x$ 和 $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - b$ 都相切，则实数 $b =$ _____.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 ，双曲线 C 的一条渐近线的斜率为 $\sqrt{3}$ ，过点 F_2 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 P, Q 两点. A, B 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 和 $\triangle QF_1F_2$ 的内心，若四边形 AF_1BF_2 的面积为 $4\sqrt{2}a^2$ ，则直线 l 的斜率为 _____.

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

15. (13 分) 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2, a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边, 且 $a < c \cos B$.

(1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状;

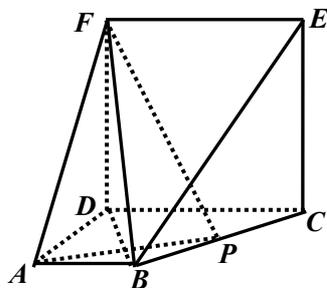
(2) 若 $a \cos B + b \cos A = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 周长的最大值.

16. (15 分) 如图, 在多面体 $ABCDEF$ 中, 四边形 $EFDC$ 为正方形, $AD \perp$ 平面 $EFDC$, $AB \parallel CD$, 且 $AB = AD = 2, CD = 4$, P 为棱 BC 上的点.

(1) 证明: 平面 $FDB \perp$ 平面 BCE ;

(2) 若平面 FAP 与平面 FBD 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{14}$,

求线段 BP 的长.



第 16 题图

17. (15 分) 已知函数 $f(x) = e^x \sin x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 试判断曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = x$ 在 $[0, \pi]$ 上公共点的个数;

18. (17分) “村超”是乡村足球超级联赛的简称. 其通过全民参与的体育赛事激活了乡村振兴新动能, 构建了集文化自信、经济发展、社会治理于一体的乡村发展新模式. 为了提高参赛球队技战术水平, 某乡镇组织甲、乙、丙、丁四支参赛球队进行了“热身排位赛”, 赛程为: 第一轮: 经过抽签, 甲队和乙队为一组, 丙队和丁队为一组, 两组分别进行组内比赛, 每组的胜者编入 A 组, 负者编入 B 组; 第二轮: A, B 两组的球队分别进行组内比赛, A 组的胜者进入决赛, B 组的负者获得第 4 名; 第三轮: A 组的负者和 B 组的胜者比赛, 胜者进入决赛, 负者获得第 3 名; 第四轮: 决赛, 胜者获得第 1 名, 负者获得第 2 名. 已知甲队与其他三支球队的比赛中, 甲队获胜的概率均为 $\frac{2}{3}$. 乙、丙、丁三支球队间的比赛中, 每支球队获胜的概率均为 $\frac{1}{2}$ (比赛没有平局). 且

各场比赛之间互不影响.

- (1) 求在第一轮比赛中甲队获胜的条件下, 乙队获得第 3 名的概率;
- (2) 记甲队最终获得的名次为随机变量 ζ , 求 ζ 的分布列和数学期望.

19. (17分) 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $x = a$ 与抛物线 C 交于 P, Q 两点,

$$|PQ| = 4\sqrt{5}, \text{ 且 } \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0 \text{ (} O \text{ 为坐标原点)}.$$

- (1) 求抛物线 E 的方程;
- (2) A, B, C, D 为抛物线 E 上的 4 个点, $AB \parallel CD$, 且直线 AC 与 BD 交于点 $N(2, 1)$.
 - (i) 求直线 AB 的斜率;
 - (ii) 试判断直线 AD 与 BC 是否交于定点? 若是, 请求出该定点的坐标; 若否, 请说明理由.