高三题库
数学学科参考答案及解析

一、选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题所给的四个选项中，只有一项符合题目要求.）

1. C【解析】$z=\dfrac{i^3}{1+i}=\dfrac{-i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$，所以 z 在复平面内对应的点位于第三象限，故选 C.

2. C【解析】由题 $B=\{0,1,2,3\}$，所以 $\complement_{\mathbf{N}}B=\{x\in\mathbf{N}\mid x\geq 4\}$，故 $(\complement_{\mathbf{N}}B)\cap A=\{4,8\}$，故选 C.

3. D【解析】由题 $a>0$，$b>0$ 且 $b=\dfrac{2}{a}$，即 $ab=2$，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{a}\times\dfrac{1}{b}}=\dfrac{2}{\sqrt{ab}}=\sqrt{2}$，当且仅当 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$，即 $a=b=\sqrt{2}$ 时，等号成立，所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}$，故选 D.

4. A【解析】$g(x)=\sin[2(x+\dfrac{\pi}{6})+\dfrac{\pi}{6}]=\sin(2x+\dfrac{\pi}{2})=\cos 2x$，所以 $g(\dfrac{\pi}{6})=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，故选 A.

5. D【解析】四大名著 3 本相邻共有 $A_4^3A_5^2=480$ 种插法；4 本相邻时共有 $A_4^4C_5^1=120$ 种插法，所以不同的插法共有 600 种，故选 D.

6. B【解析】由 $f(x)=f(6-x)$，$f(x+4)-f(x)=2f(2)$，令 $x=1$ 得 $f(5)=f(1)$，$f(5)-f(1)=2f(2)$，所以 $f(2)=0$，故 $f(x+4)=f(x)$，所以 $f(2026)=f(506\times 4+2)=f(2)=0$，故选 B.

7. D【解析】设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1，1-m)$，由题可知向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量 $\boldsymbol{c}$ 的模为 1，因为 $\boldsymbol{c}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|}\times\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{-m}{2}\boldsymbol{a}=(-\dfrac{m}{2},-\dfrac{m}{2})$，所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(-\dfrac{m}{2})^2+(-\dfrac{m}{2})^2}=1$，解得 $m=\sqrt{2}$ 或 $m=-\sqrt{2}$，故选 D.

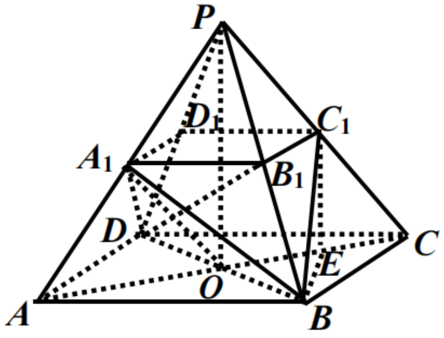
8. A【解析】由 $a_{n+2}>a_{n+1}+a_n$ 得：$a_3>a_2+a_1$，$a_4>a_3+a_2$，$a_5>a_4+a_3$，……，$a_{n+2}>a_{n+1}+a_n$，不等式左右两边分别相加得 $a_{n+2}>a_2+a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n+a_2$，所以 $a_{n+2}>S_n+a_2$；对于 $a_1=a_2=0$，$a_3=a_4=1$，满足 $a_3>S_1+a_2$，$a_4>S_2+a_2$，但 $a_4=a_3+a_2$，所以“$a_{n+2}>a_{n+1}+a_n$”是“$a_{n+2}>S_n+a_2$”的充分不必要条件，故选 A.

二、选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题所给的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分.）

9. BC【解析】因为 $\mu=1$，所以 $P(1\leq X\leq 4)=P(X\geq 1)-P(X>4)=0.5-b$，A 错误；因为 $P(X<-1)=P(X>3)$，所以 $P(X>4)<P(X>3)<P(X>2)$，即 $b<P(x<-1)<a$，B 正确；因为 $P(|X|\leq 2)=P(-2\leq X\leq 2)$，因为 $P(X<-2)=P(X>4)$，故 $P(|X|\leq 2)=P(-2\leq X\leq 2)=1-P(x>2)-P(X>4)=1-a-b$，C 正确；因为 $m>0$，所以 $2+m>1>-m$，又 $2+m-1=1-(-m)$，所以 $P(X>2+m)=P(x<-m)$，D 错误. 故选 BC.

10. ACD【解析】设 AC，BD 交于点 O，连接 A_1O，易知 $PC\,//\,A_1O$，又 $A_1O\subset$ 平面 A_1BD，$PC\not\subset$ 平面 A_1BD，所以 $PC\,//$ 平面 A_1BD，A 正确；由题，多面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为四棱台，$A_1B_1=2$，设四棱台的高为 h，则四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}h(4+16+\sqrt{4\times 16})=\dfrac{28\sqrt{2}}{3}$，得 $h=\sqrt{2}$，易知四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的高 $PO=2\sqrt{2}$，故 $PA=PB=PC=PD=4$，易知 $PA\perp PC$，$PB\perp PD$，

所以点 O 即为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球球心，其半径 $R=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$，B 错误；取 OC 中点 E，则 $CE // PO$，所以 $CE\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle C_1BE$ 即为直线 BC_1 与底面 $ABCD$ 所成的角，$C_1E=\sqrt{2}$，$BE=\sqrt{OB^2+OE^2}=\sqrt{10}$，$BC_1=\sqrt{BE^2+C_1E^2}=2\sqrt{3}$，所以 $\cos\angle C_1BE=\frac{\sqrt{30}}{6}$，C 正确；由题可得 $AA_1=CC_1=\sqrt{CE^2+C_1E^2}=2$，所以 $PA=4$，可得



第 10 题解图

$\triangle PAD$ 为正三角形，所以 $S_{\Delta PAD}=\frac{1}{2}PA\times PD\times\sin\angle APD=4\sqrt{3}$，又 $PO=2h=2\sqrt{2}$，故 $V_{P-ABD}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}\times PO=\frac{16\sqrt{2}}{3}$，设点 B 到平面 PAD 的距离为 d，则 $V_{B-PAD}=V_{P-ABD}=\frac{1}{3}S_{\Delta PAD}d=\frac{4\sqrt{3}}{3}d=\frac{16\sqrt{2}}{3}$，解得 $d=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，所以点 B 到平面 PAD 的距离为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$，D 正确．故选 ACD.

11. BCD【解析】将曲线 E 的方程中 x，y 互换得 $x^2+y^2=\sin^2 y+\cos^2 x$，与原方程不同，所以曲线 E 不关于直线 $y=x$ 对称，A 错误；将 $y=x+\pi$ 代入曲线 E 的方程得 $2x^2+2\pi x+\pi^2-1=0$，因为 $\Delta=4\pi^2-4\times2\times(\pi^2-1)=8-4\pi^2<0$，所以方程无实数解，所以曲线 E 与直线 $y=x+\pi$ 无公共点，故点 P 不可能在直线 $y=x+\pi$ 上，B 正确；由 $x^2+y^2=\sin^2 x+\cos^2 y$ 得 $x^2-\sin^2 x+y^2+\sin^2 y=1$，因为 $y^2+\sin^2 y\geq0$，所以 $x^2-\sin^2 x\leq1$，设 $m(x)=x^2-\sin^2 x-1\,(-a\leq x\leq a,\ a>0)$，$m'(x)=2x-\sin2x$，设 $p(x)=2x-\sin2x$，则 $p'(x)=2-2\cos2x\geq0$，$m'(x)$ 单调递增，由 $m'(0)=0$，得 $m(x)$ 在 $(-a,0)$ 上单调递减，在 $(0,\ a)$ 上单调递增，又 $m(0)=-1<0$，$m(\frac{\pi}{3})=m(-\frac{\pi}{3})=\frac{\pi^2}{9}-\frac{7}{4}<0$，$m(\frac{\pi}{2})=m(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi^2}{4}-2>0$，故 $\frac{\pi}{3}<a<\frac{\pi}{2}$，同理可得 $-b\leq y\leq b$，$\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$，将 $x^2+y^2=1$ 代入曲线 E 的方程得 $\sin^2 x+\cos^2 y=1$，即 $\sin^2 x+(1-\sin^2 y)=1$，即 $\sin^2 x=\sin^2 y$，所以 $\sin x=\sin y$ 或 $\sin x=-\sin y$，故 $x=y$ 或 $x=-y$，当 $x=y>0$ 时，得 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$，当 $x=-y$ 时，得 $x=-y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=-y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以曲线 E 与圆 $x^2+y^2=1$ 有 4 个公共点 $(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，C 正确；$|OP|^2=x_0^2+y_0^2=\sin^2 x_0+\cos^2 y_0$，因为 $-a<x_0<a$，且 $\frac{\pi}{3}<a<\frac{\pi}{2}$，所以 $0\leq\sin^2 x_0<1$，又 $-b\leq y\leq b$，$\frac{\pi}{6}<b<\frac{\pi}{4}$，所以 $\frac{1}{2}<\cos^2 y_0\leq1$，故 $\frac{1}{2}<|OP|^2<2$，可得曲线 E 在圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}$ 和 $x^2+y^2=2$ 之间，所以 $\frac{\pi}{2}<S<2\pi$，D 正确，故选 BCD.

三、填空题（本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12. $\frac{4}{5}$【解析】由 $4\sin^2\frac{\alpha}{2}=4\times\frac{1-\cos\alpha}{2}=2-\sin\alpha$ 得 $\sin\alpha=2\cos\alpha$，即 $\tan\alpha=2$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{4}{5}$.

13. $\dfrac{1}{2}$【解析】$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，设直线 l 与曲线 $f(x)=\ln x$ 切于点 $(x_1,\ln x_1)$，则 $\dfrac{1}{x_1}=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$，得 $x_1=1$，

所以直线 l 的方程为 $x-y-1=0$，设直线 l 与曲线 $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2-b$ 切于点 $(x_2,\ \dfrac{1}{2}x_2^2-b)$，则 $g'(x_2)=$

$x_2=1$，所以点 $(1,\ \dfrac{1}{2}-b)$ 在直线 l 上，故 $1-(\dfrac{1}{2}-b)-1=0$，得 $b=\dfrac{1}{2}$.

14. 1 或 -1【解析】设双曲线 C 的焦距为 $2c$，则 $\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{c^2-a^2}{a^2}=3$，得 $c=2a$，设点 A 在直线 PF_1，PF_2，F_1F_2 上的射影分别为 D，E，M，则 $|PF_1|-|PF_2|=|DF_1|-|EF_2|=|MF_1|-|MF_2|=2a$，又 $|MF_1|+|MF_2|=2c$，所以 $|MF_1|=a+c$，故点 M 的横坐标为 a，所以点 A 的横坐标为 a，同理可得点 B 的横坐标也为 a，所以 $AB\perp F_1F_2$，故 $2S_{四边形AF_1BF_2}=|AB|\times|F_1F_2|=|AB|\times 2c=8\sqrt{2}a^2$，得

$|AB|=2\sqrt{2}a$，设直线 l 的倾斜角为 $\alpha\,(0<\alpha<\pi)$，则 $|AM|=|MF_2|\tan(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2})=\dfrac{a}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$，

$|BM|=|MF_2|\tan\dfrac{\alpha}{2}=a\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$|AB|=|AM|+|BM|=\dfrac{a}{\tan\dfrac{\alpha}{2}}+a\tan\dfrac{\alpha}{2}=2\sqrt{2}a$，解得 $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{2}+1$ 或

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(\sqrt{2}+1)^2}=-1$ 或 $\tan\alpha=\dfrac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=1$，故直线 l 的斜率为 1 或 -1.

（注：考生填 ±1 也得分）

四、解答题（本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

15.【解析】（1）因为 $a<c\cos B$，由余弦定理得 $a<c\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

即 $a^2+b^2-c^2<0$，..........................2 分

故 $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$，所以 $\cos C<0$，故 C 为钝角，

所以△ABC 为钝角三角形. ....4 分

另解：因为 $a<c\cos B$，由正弦定理得 $\sin A<\sin C\cos B$，................1 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)<\sin C\cos B$，

即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C<\sin C\cos B$，即 $\sin B\cos C<0$，......................3 分

因为 $0<B<\pi$，$0<C<\pi$，

所以 $\cos C<0$，故 C 为钝角，

所以△ABC 为钝角三角形. ....4 分

（2）由题 $a\cos B+b\cos A=2\sqrt{3}$，由正弦定理得 $4\sin A\cos B+4\sin B\cos A=2\sqrt{3}$，

即 $\sin(A+B)=\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

由（1）知 C 为钝角，所以 $C=\dfrac{2\pi}{3}$，　　　　　　　　　　　. . . . . 6 分

又 $a+b=4\sin A+4\sin B=4[\sin A+\sin(\dfrac{\pi}{3}-A)]=4(\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A)=4\sin(A+\dfrac{\pi}{3})$，. . . . . . 8 分

因为 $0<A<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{\pi}{3}<A+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<4\sin(A+\dfrac{\pi}{3})\le 4$，即 $a+b$ 的最大值为 4，　　　. . . . . 10 分

由 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ 得 $\dfrac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，所以 $c=2\sqrt{3}$，　　　　　　. . . . . 12 分

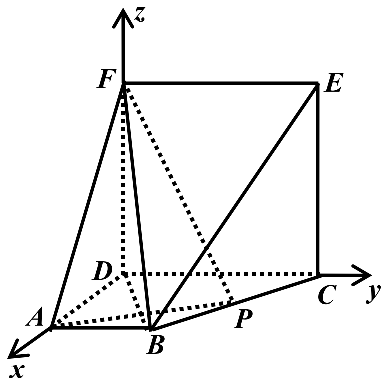
所以△ABC 周长 $a+b+c$ 的最大值为 $4+2\sqrt{3}$.　　　　　. . . . . 13 分

16.【解析】（1）证明：因为 $AD\perp$ 平面 $EFDC$，$CE\subset$ 平面 $EFDC$，所以 $AD\perp CE$，
又四边形 $EFDC$ 为正方形，所以 $CE\perp CD$，
因为 $CE\cap CD=C$，所以 $CE\perp$ 平面 $ABCD$，　　　　. . . . . 2 分
又 $BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BD\perp CE$，
在四边形 $ABCD$ 中，易知 $AB\perp AD$，因为 $AB=AD=2$，所以 $BD=2\sqrt{2}$，
又 $CD=4$，故 $BC=\sqrt{AD^2+(\dfrac{CD}{2})^2}=2\sqrt{2}$，
所以 $BD^2+BC^2=CD^2$，故 $BD\perp BC$，　　　　　. . . . . 4 分
因为 $CE\cap BC=C$，所以 $BD\perp$ 平面 BCE，
又 $BD\subset$ 平面 FDB
所以平面 $FDB\perp$ 平面 BCE.　　　. . . . . 6 分

（2）由（1）知 DA，DC，DF 三条直线两两垂直. 以 D 为坐标原点、DA，DC，DF 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，设 $BP=\lambda BC\ (0\le\lambda\le1)$，则：$D(0,0,0)$，$F(0,0,4)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$P(2-2\lambda,2+2\lambda,0)$，　. . . . . 8 分
设平面 FBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x，y，z)$，

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}4z=0,\\ 2x+2y=0\end{cases}$，令 $x=1$，得 $y=-1，z=0$，

所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1，0)$，　　　. . . . . 10 分



第 16 题解图

设平面 FAP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1，y_1，z_1)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2x_1-4z_1=0,\\ -2\lambda x_1+(2+2\lambda)y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=2+2\lambda$，得 $y_1=2\lambda，z_1=1+\lambda$，

所以 $\boldsymbol{n}=(2+2\lambda, 2\lambda, 1+\lambda)$， ....12 分

$|\cos<\boldsymbol{m}，\boldsymbol{n}>|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\times|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{(2+2\lambda)^2+4\lambda^2+(1+\lambda)^2}}=\dfrac{\sqrt{42}}{14}$

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=-\dfrac{13}{9}$（舍） ....14 分

所以 $BP=\dfrac{1}{3}BC=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ， ....15 分

17.【解析】（1）由题，$f'(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}\mathrm{e}^x\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$， ....1 分

因为 $\mathrm{e}^x>0$，所以当 $x\in(2k\pi-\dfrac{\pi}{4}, 2k\pi+\dfrac{3\pi}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}, 2k\pi+\dfrac{7\pi}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

综上：函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\dfrac{\pi}{4}, 2k\pi+\dfrac{3\pi}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$；

单调递减区间为 $(2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}, 2k\pi+\dfrac{7\pi}{4})$，$k\in\mathbf{Z}$. ....5 分

（2）令 $g(x)=f(x)-x=\mathrm{e}^x\sin x-x$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)-1$，

设 $h(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)-1$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)=2\mathrm{e}^x\cos x$，

所以当 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$（即 $g'(x)$）单调递增；

当 $x\in(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$（即 $g'(x)$）单调递减， ....8 分

因为 $g'(0)=0$，$g'(\dfrac{\pi}{2})=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1>0$，$g'(\pi)=-\mathrm{e}^{\pi}-1<0$，

所以存在唯一的 $x_1\in(\dfrac{\pi}{2}，\pi)$，使得 $g'(x_1)=0$， ....11 分

故当 $x\in(0，x_1)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_1，\pi)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

又 $g(x_1)>g(0)=0$，$g(\pi)=-\pi<0$，

所以存在唯一的 $x_2\in(x_1，\pi)$，使得 $g(x_2)=0$， ....14 分

综上可得函数 $g(x)$ 在 $[0，\pi]$ 上存在两个零点 0 和 x_2，

所以曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=x$ 在 $[0，\pi]$ 上公共点的个数为 2. ....15 分

18.【解析】（1）设 M：乙队获得第 3 名；N：第一轮比赛中甲队获胜；

则 $P(N)=\frac{2}{3}$， ....2 分

$P(MN)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{27}$， ....6 分

所以 $P(M\mid N)=\frac{P(MN)}{P(N)}=\frac{5}{18}$，

所以在第一轮比赛中甲队获胜的条件下，乙队获得第三名的概率为 $\frac{5}{18}$， ....8 分

（2）随机变量 ξ 的可能取值为 1，2，3，4， ....9 分

$P(\xi=1)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{40}{81}$；

$P(\xi=2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{81}$；

$P(\xi=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$；

$P(\xi=4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$； ....13 分（每求对一个概率值给 1 分）

所以 ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{40}{81}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{9}$

................................15 分

ξ 的数学期望 $E(\xi)=1\times\frac{40}{81}+2\times\frac{20}{81}+3\times\frac{4}{27}+4\times\frac{1}{9}=\frac{152}{81}$. ....17 分

19.【解析】（1）由题可知 $a>0$，$F(\frac{p}{2},0)$，不妨设 $P(a,2\sqrt{5})$，$Q(a,-2\sqrt{5})$，

则 $(2\sqrt{5})^2=2pa$，即 $pa=10$ ①， ....1 分

又 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{OQ}=(\frac{p}{2}-a,-2\sqrt{5})\cdot(a,-2\sqrt{5})=-a^2+\frac{1}{2}pa+20=0$ ②，

由①②解得 $a=5$，$p=2$，

所以抛物线 E 的方程为 $y^2=4x$ ....3 分

（2）（i）由题，直线 AB 的斜率不可能为 0，

设直线 $AB: x=my+n$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$，$D(x_4, y_4)$，

联立方程 $\begin{cases} y^2=4x, \\ x=my+n \end{cases}$，得 $y^2-4my-4n=0$，

则 $\Delta=16m^2+16n>0$，$y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$， ....4 分

可得直线 $AC: x=\dfrac{x_1-2}{y_1-1}(y-1)+2$，

与抛物线 E 的方程联立消去 x 得：$y^2-\dfrac{4(x_1-2)}{y_1-1}y+\dfrac{4(x_1-2)}{y_1-1}-8=0$，

则 $y_1+y_3=\dfrac{4(x_1-2)}{y_1-1}$，即 $y_3=\dfrac{4(x_1-2)}{y_1-1}-y_1$， ....6 分

因为 $y_1^2=4x_1$，可得 $y_3=\dfrac{4(\frac{y_1^2}{4}-2)}{y_1-1}-y_1=\dfrac{y_1-8}{y_1-1}$，同理可得：$y_4=\dfrac{y_2-8}{y_2-1}$， ....7 分

则 $k_{CD}=\dfrac{y_3-y_4}{x_3-x_4}=\dfrac{y_3-y_4}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}=\dfrac{4}{y_3+y_4}=\dfrac{4}{\frac{y_1-8}{y_1-1}+\frac{y_2-8}{y_2-1}}=\dfrac{4[y_1y_2-(y_1+y_2)+1]}{2y_1y_2-9(y_1+y_2)+16}=\dfrac{4n+4m-1}{2n+9m-4}$，

..............................8 分

因为 $AB//CD$，所以 $k_{AB}=k_{CD}$，即 $\dfrac{1}{m}=\dfrac{4n+4m-1}{2n+9m-4}$，

整理得 $(2m-1)(m+n-2)=0$，

由题可知点 $N(2,1)$ 不可能在直线 AB 上，所以 $m+n\neq 2$，

所以 $2m-1=0$，即 $m=\dfrac{1}{2}$， ....10 分

所以直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\dfrac{1}{m}=2$. ....11 分

（ii）是，直线 AD 与 BC 的交于定点 $(-\dfrac{3}{2},1)$. ....12 分

由（i）知 $y_1+y_2=4m=2$，所以可设 AB 中点 $R(r,1)$，

因为 $k_{CD}=\dfrac{4}{y_3+y_4}=2$，得 $y_3+y_4=2$，所以可设 CD 中点 $T(t,1)$，

所以直线 $RT: y=1$， ....14 分

因为 $AB//CD$，所以直线 AD 与 BC 的交点即为直线 AD 与 RT 的交点，

因为$k_{AD}=\frac{y_1-y_4}{x_1-x_4}=\frac{y_1-y_4}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_4^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_4}$,

所以直线$AD:x=\frac{y_1+y_4}{4}(y-y_1)+x_1$, ...15 分

令$y=1$得$x=\frac{y_1+y_4}{4}(1-y_1)+\frac{y_1^2}{4}=\frac{y_1+y_4-y_1y_4}{4}$

$$=\frac{y_1+\frac{y_2-8}{y_2-1}-\frac{y_1(y_2-8)}{y_2-1}}{4}=\frac{7(y_1+y_2)-6y_2}{4(y_2-1)}=\frac{6(1-y_2)}{4(y_2-1)}=-\frac{3}{2},$$

所以直线AD与BC的交于定点$(-\frac{3}{2},1)$. ....17 分