2018学年第一学期浙南名校联盟期末考试

高三年级 数学学科 试题

命题： 浙江省瓯海中学

考生须知：

1. 本卷共4页，满分150分，考试时间120分钟；
2. 答题前，在答题卷指定区域填写班级、姓名、考场号、座位号及准考证号并填涂相应数字。
3. 所有答案必须写在答题纸上，写在试卷上无效；
4. 考试结束后，只需上交答题纸。

参考公式：

若事件 A，B 互斥，则柱体的体积公式

$P(A+B)=P(A)+P(B)$ $V=Sh$

若事件 A，B 相互独立，则其中 S 表示柱体的底面积，h 表示柱体的高

$P(AB)=P(A)P(B)$ 锥体的体积公式

若事件 A 在一次试验中发生的概率为 p， $V=\frac{1}{3}Sh$

则 n 次独立重复试验中事件 A 发生 k 次的 其中 S 表示锥体的底面积，h 表示锥体的高

概率 $P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 球的表面积公式

台体的体积公式 $S=4\pi R^2$

$V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)h$ 球的体积公式

其中 S_1，S_2 分别表示台体的上、下底面积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$

h 表示台体的高 其中 R 表示球的半径

选择题部分（共40分）

一、选择题：本大题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid 0<x<2\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid |x|<1\}$，则 $A\cap B=$

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $(-1,2)$

2. 双曲线 $x^2-2y^2=2$ 的焦点坐标为

A. $(\pm1,0)$　　B. $(\pm\sqrt{3},0)$　　C. $(0,\pm1)$　　D. $(0,\pm\sqrt{3})$

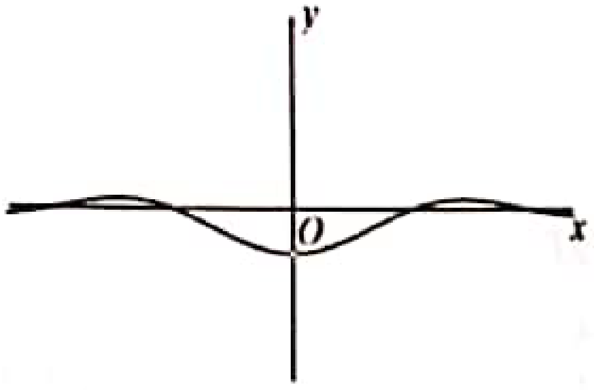
3. 设实数x,y满足$\begin{cases}x+y-1\leqslant 0,\\ 2x-y\leqslant 0,\\ 2x-y+1\geqslant 0\end{cases}$，则$x-y$的最小值为

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. -2

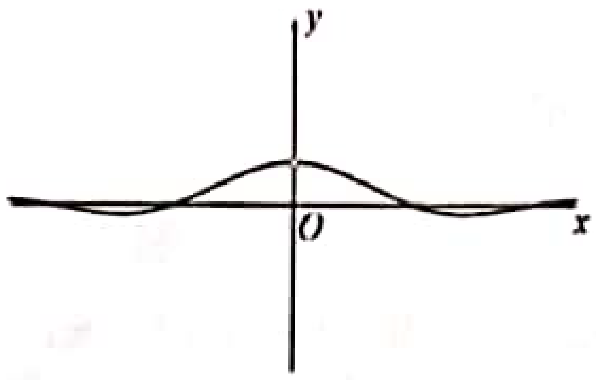
4. 若复数$z_1=2+\mathrm{i}$，$z_2=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$，其中i是虚数单位，则$|z_1-z_2|$的最大值为

A. $\sqrt{5}-1$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　　C. $\sqrt{5}+1$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

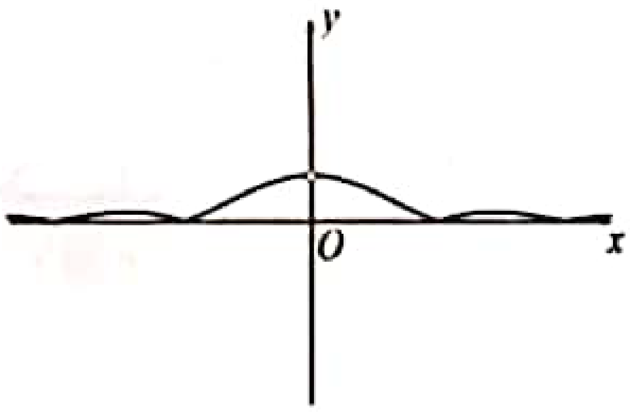
5. 函数$y=\dfrac{\sin x}{x}$的图象可能是



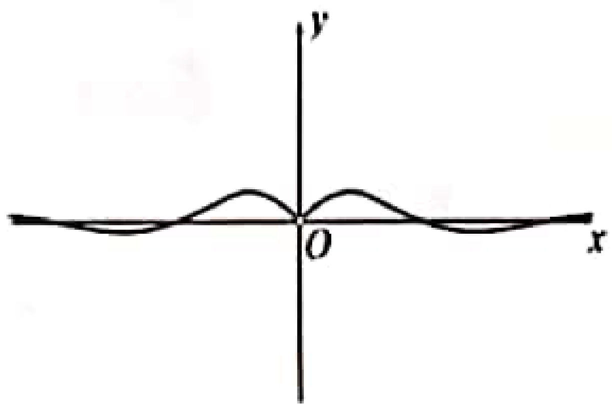
A.



B.



C.



D.

6. 已知a，$b\in\mathbf{R}$，则“$a=b$”是“$\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^b=a-b$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7.甲、乙二人均从5种不同的食品中任选一种或两种吃，则他们一共吃到了3种不同食品的情况有

A. 84种　　B. 100种　　C. 120种　　D. 150种

8. 已知随机变量X的分布列如下表：

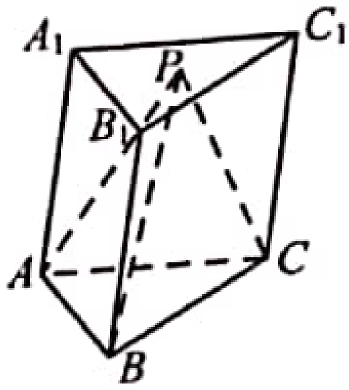
X	-1	0	1
P	a	b	c

其中$a,b,c>0$. 若X的方差$DX\leqslant\dfrac{1}{3}$对所有$a\in(0,1-b)$都成立，则

A. $b\leqslant\dfrac{1}{3}$　　B. $b\leqslant\dfrac{2}{3}$　　C. $b\geqslant\dfrac{1}{3}$　　D. $b\geqslant\dfrac{2}{3}$

9. 如第 9 题图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，点 P 在平面 $A_1B_1C_1$ 内运动，使得二面角 $P-AB-C$ 的平面角与二面角 $P-BC-A$ 的平面角互余，则点 P 的轨迹是

A. 一段圆弧　　B. 椭圆的一部分　　C. 抛物线　　D. 双曲线的一支



（第 9 题图）

10. 设 α,β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个不等实根，记 $a_n=\alpha^n+\beta^n(n\in\mathbf{N}^*)$．

下列两个命题：

①数列 $\{a_n\}$ 的任意一项都是正整数；

②数列 $\{a_n\}$ 存在某一项是 5 的倍数．

A. ①正确，②错误　　B. ①错误，②正确

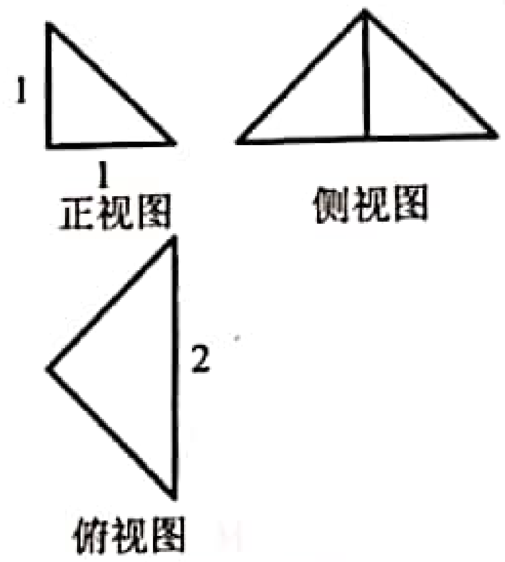
C. ①②都正确　　D. ①②都错误

非选择题部分（共 110 分）

二、填空题：本大题共 7 小题，多空题每题 6 分，单空题每题 4 分，共 36 分。

11. 《九章算术》中记载了“今有共买豕，人出一百，盈一百；人出九十，适足。问人数、豕价各几何？”．其意思是“若干个人合买一头猪，若每人出 100，则会剩下 100；若每人出 90，则不多也不少。问人数、猪价各多少？”．设 x,y 分别为人数、猪价，则 $x=$______，$y=$______．

12. 某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为______，表面积为______．



(第12题图)

13. 在 ΔABC 中，内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c．

若 $b\sin A=a\sin C$，$c=1$，则 $b=$______，ΔABC 面积的最大值为______．

14. 实数 $a_i(i=0,1,2,3,4,5)$ 满足：对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有

$$(1+x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5,$$

则 $a_0=$______，$\dfrac{a_0}{1}+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\dfrac{a_3}{4}+\dfrac{a_4}{5}+\dfrac{a_5}{6}=$______．

15. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F．若抛物线上存在点 A，使得线段 AF 的中点的横坐标为 1，则 $|AF|=$______．

16. 若向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})=0$，则 $\dfrac{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{c}|}$ 的最小值是______．

17. 若对任意 $a>0$，函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 在开区间 $(-\infty,0)$ 内有且仅有一个零点，则实数 b 的取值范围是______．

三、解答题：本大题共 5 小题，共 74 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

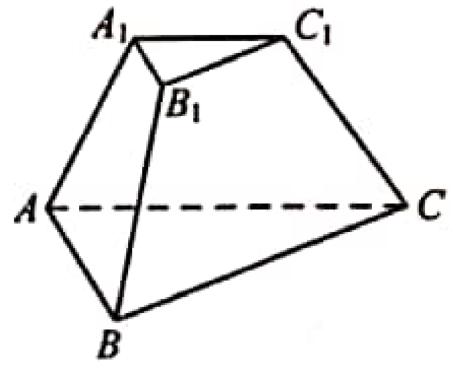
18.（本题满分 14 分）（I）证明：$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)](\alpha,\beta\in\mathbf{R})$；

（II）求函数 $f(x)=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})$ 的最小正周期与单调递增区间.

19.（本题满分 15 分）在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，ΔABC 是等边三角形，二面角 $A-BC-B_1$ 的平面角为 60°，$BB_1=CC_1$.

（I）求证：$A_1A\perp BC$；

（II）求直线 AB 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.



(第19题图)

20.（本题满分 15 分）已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q\in(0,1)$，前 n 项和为 S_n.

若 $S_3+a_3=1$，且 $a_2+\frac{1}{16}$ 是 a_1 与 a_3 的等差中项.

（I）求 a_n；

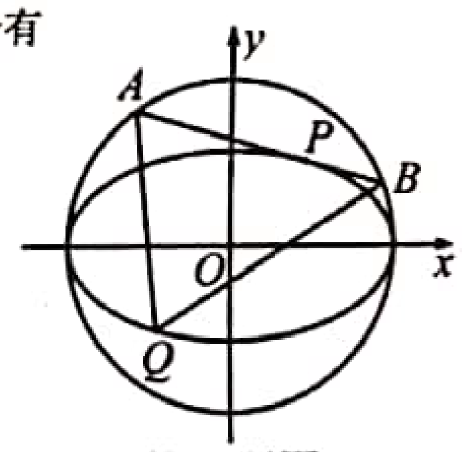
（II）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=0$，$b_{n+1}-b_n=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，数列 $\{a_nb_n\}$ 的前 n 项和为 T_n. 求证：

$T_n<\frac{1}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$.

21.（本题满分 15 分）已知直线 $l:y=kx+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 恰有一个公共点 P，l 与圆 $x^2+y^2=a^2$ 相交于 A,B 两点.

（I）求 k 与 m 的关系式；

（II）点 Q 与点 P 关于坐标原点 O 对称. 若当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，ΔQAB 的面积取到最大值 a^2，求椭圆的离心率.



（第21题图）

22.（本题满分 15 分）设 $a,b\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\ln(1+x)+ax^2+bx$.

（I）证明：当 $b=0$ 时，对任意实数 a，直线 $y=x$ 总是曲线 $y=f(x)$ 的切线；

（II）若存在实数 a，使得对任意 $x>-1$ 且 $x\neq0$，都有 $xf(x)>0$，求实数 b 的最小值.

2018 学年第一学期温州九校期末联盟考试

高三年级数学参考答案

命题：浙江省瓯海中学 黄成宝、叶柯达　　联系电话：18989729620
审稿：瑞安中学　张瑞　　　联系电话：13505771813

1-10. ABCCB ACDDA

11. 10；900　12. $\frac{1}{3}$；$2\sqrt{2}+1$　13. 1；$\frac{1}{2}$　14. 1；$\frac{21}{2}$　15. 2　16. 2　17. $(-\infty,3]$

18.（本题满分 14 分）

（I）证明：对任意 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，　……………………………2 分

两式相加，得

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$，　……………………………4 分

即 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$；　……………………………6 分

（II）由（I），$f(x)=\sin x\cos(x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}[\sin(x+(x+\frac{\pi}{3}))+\sin(x-(x+\frac{\pi}{3}))]=\frac{1}{2}[\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{2}]=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

即 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{3})-\frac{\sqrt{3}}{4}$.　……………………………10 分

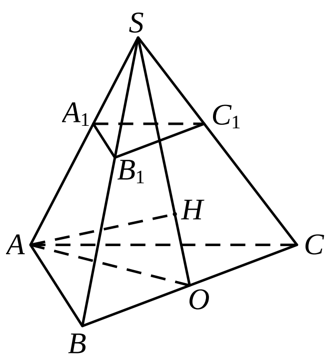
故 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.　……………………………12 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $-\frac{5\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-\frac{5\pi}{12}+k\pi,\frac{\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.　………………14 分

19.（本题满分 15 分）

（I）证明：设 AA_1，BB_1 与 CC_1 交于点 S，取棱 BC 的中点 O，



连结 AO,SO.

因 $BB_1=CC_1$，$B_1C_1\,/\!/\,BC$，

故 $SB=SC$.　…………………………2 分

又 O 是棱 BC 的中点，

故 $BC\perp SO$.

同理 $BC\perp AO$

又 $SO, AO \subset$ 平面 SAO，且 $SO \cap AO = O$，

因此 $BC \perp$ 平面 SAO，

又 $A_1A \subset$ 平面 SAO， ························4 分

所以 $A_1A \perp BC$； ························6 分

（II）**方法一：**

作 $AH \perp SO$，垂足为 H.

因 $BC \perp$ 平面 SAO，

故 $AH \perp$ 平面 BCC_1B_1，

从而 $\angle ABH$ 为直线 AB 与平面 BCC_1B_1 所成的角. ······················10 分

不妨设 $AB = 2$，则 $AO = \sqrt{3}$， $AH = AO\sin\angle AOH = \dfrac{3}{2}$， ·····················13 分

所以 $\sin\angle ABH = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{3}{4}$. ·····················15 分

方法二：如图，以 O 为原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$， ·····················8 分

由（I），$\angle AOS$ 为二面角 $A-BC-B_1$ 的平面角，则 $\angle AOS = 60^\circ$，

设 $BC = 2$， $SO = a(a>0)$，则点 $A(\sqrt{3},0,0)$ ，$B(0,1,0)$ ，$C(0,-1,0)$ ， $S(\dfrac{a}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a)$.

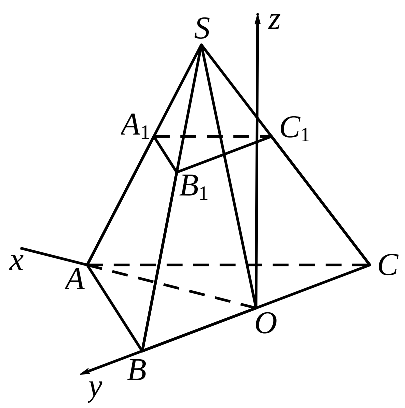
设 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$ 为平面 BCC_1B_1，即平面 SBC 的一个法向量，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB} = 0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OS} = 0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2y = 0,\\ \dfrac{a}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\cdot z = 0\end{cases}$， ·········10 分

令 $x = \sqrt{3}$，则 $z = -1$，即 $\boldsymbol{n} = (\sqrt{3},0,-1)$. ······12 分

设 θ 是直线 AB 与平面 BCC_1B_1 所成的角，

则 $\sin\theta = |\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}>| = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{3}{4}$. ···········15 分



20. （本题满分 15 分）

（I）由 $S_3 + a_3 = 1$，得 $a_1 + a_2 + 2a_3 = 1$①.

再由 $a_2 + \dfrac{1}{16}$ 是 a_1， a_3 的等差中项，得 $a_1 + a_3 = 2(a_2 + \dfrac{1}{16})$，

即 $a_1 + a_3 - 2a_2 = \dfrac{1}{8}$②. ···························2 分

由①②，得 $a_1+a_2+2a_3=8(a_1+a_3-2a_2)$，

即 $6a_3-17a_2+7a_1=0$，亦即 $6q^2-17q+7=0$，

解得 $q=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{7}{3}$，又 $q\in(0,1)$，故 $q=\frac{1}{2}$.　　　…………………………4 分

代入①，得 $a_1=\frac{1}{1+q+2q^2}=\frac{1}{2}$，

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^n$，

即 $a_n=\frac{1}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$；　　　…………………………6 分

（II）证明：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}=1-a_n$，　　　…………10 分

$b_{n+1}=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{n+1}-b_n)=0+a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n=1-a_n$，

即 $b_{n+1}=1-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，又 $b_1=0$，故 $b_n=1-\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.　　　………………13 分

于是 $a_nb_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{2n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，从而

$T_n=(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}})=(1-\frac{1}{2^n})-(\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{4^n})}{1-\frac{1}{4}})=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^n}+$

$\frac{1}{3\cdot 2^{2n-1}}=\frac{1}{3}-\frac{3\cdot 2^{n-1}-1}{3\cdot 2^{2n-1}}<\frac{1}{3}$，

即 $T_n<\frac{1}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$.　　　………………15 分

21.（本题满分 15 分）

（I）由 $\begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$，得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2(m^2-b^2)=0$，　　　…………2 分

则 $\Delta=(2a^2km)^2-4(a^2k^2+b^2)a^2(m^2-b^2)=0$，　　　……………………4 分

化简整理，得 $m^2=a^2k^2+b^2$；　　　……………………6 分

（II）因点 Q 与点 P 关于坐标原点 O 对称，故 ΔQAB 的面积是 ΔOAB 的面积的两倍.

所以当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，ΔOAB 的面积取到最大值 $\frac{a^2}{2}$，此时 $OA\perp OB$，

从而原点O到直线l的距离$d=\frac{a}{\sqrt{2}}$，　　　　…………………8 分

又$d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}$，故$\frac{m^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$.　　　　…………………10 分

再由（I），得$\frac{a^2k^2+b^2}{k^2+1}=\frac{a^2}{2}$，则$k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}$.

又$k=-\frac{1}{2}$，故$k^2=1-\frac{2b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，即$\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{8}$，　　　　…………………13 分

从而$e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{8}$，即$e=\frac{\sqrt{10}}{4}$.　　　　…………………15 分

22.（本题满分 15 分）

易得$f(x)$的导数$f'(x)=\frac{1}{1+x}+2ax+b$.　　　　…………………2 分

（I）证明：此时$f(x)=\ln(1+x)+ax^2$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}+2ax$.

注意到对任意实数a，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，　　　　…………………4 分

故直线$y=x$是曲线$y=f(x)$在原点$(0,0)$处的切线；　　　　…………………6 分

（II）由题意，存在实数a，使得对任意$x\in(-1,0)$，都有$f(x)<0$，且对任意$x\in(0,+\infty)$，都有$f(x)>0$.　　　　…………………8 分

因$f(0)=0$，故$f'(0)\geqslant 0$（否则，若$f'(0)<0$，则在$x=0$的左右附近，恒有$f'(x)<0$，从而$f(x)$单调递减，不合题意）.　　　　…………………10 分

于是$f'(0)=1+b\geqslant 0$，因此$b\geqslant -1$.　　　　…………………12 分

又当$a=\frac{1}{2}$，$b=-1$时，$f'(x)=\frac{1}{1+x}+x-1=\frac{x^2}{1+x}\geqslant 0$（等号成立当且仅当$x=0$），

于是$f(x)$在$(-1,+\infty)$内单调递增，满足题意.

所以b的最小值为-1.　　　　…………………15 分